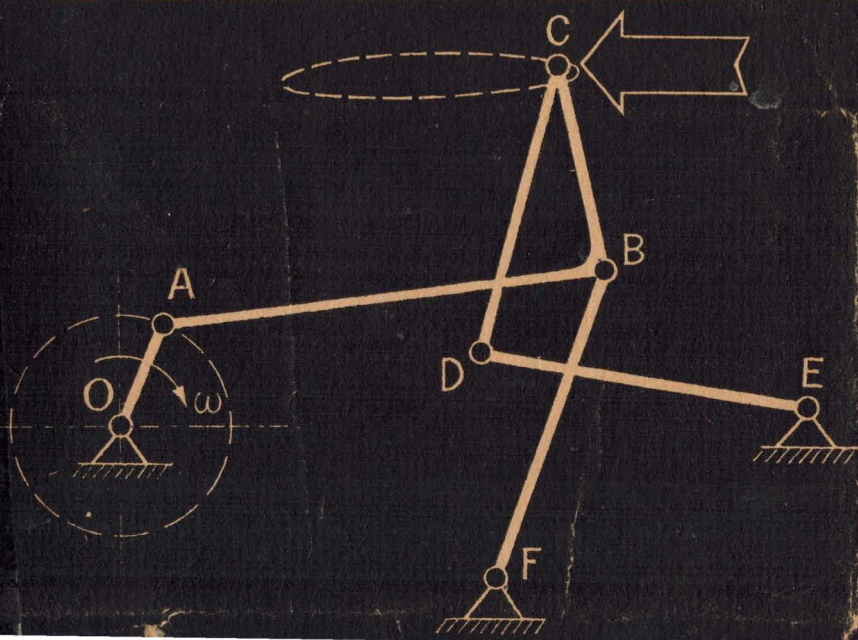




В. И. СОКОЛОВСКИЙ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И
СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ



Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Уральский ордена Трудового Красного Знамени
политехнический институт им. С. М. Кирова

В. И. СОКОЛОВСКИЙ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие

В. И. Соколовский. Кинематический анализ и синтез механизмов. Учебное пособие. Свердловск, изд. УПИ им. С. М. Кирова, 1979, с. 80.

Учебное пособие по теории механизмов и машин представляет собой изложение основного содержания лекционного курса для студентов машиностроительных специальностей вузов. В книге рассмотрены вопросы анализа и синтеза механизмов и машин.

Пособие предназначено для студентов машиностроительных специальностей всех видов обучения и может быть использовано студентами других специальностей, изучающих курсы теории механизмов и машин.

Рис. 85. Табл. 1. Библ. 9 назв.

*Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета
Уральского политехнического института*

Рецензенты: кафедра деталей машин Уральского лесотехнического института; зав. кафедрой теории механизмов и машин Челябинского политехнического института проф. докт. техн. наук Г. Г. Васин.

© Уральский политехнический
институт им. С. М. Кирова, 1979

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие является вторым переработанным изданием, составленным на основании лекций по теории механизмов и машин, читаемых автором на механическом факультете Уральского политехнического института. В этом издании отражены последние научные достижения советской школы теории механизмов и машин. Добавлены аналитические методы исследования механизмов. Все обозначения приведены в соответствие с действующими в настоящее время ГОСТами.

В пособии освещены вопросы кинематики механизмов и теории эвольвентного зубчатого зацепления. Рассматривается теория кинематических пар, дается их классификация, приводятся примеры соответствия условных изображений кинематических цепей их конструктивному исполнению. На основании идей Л. В. Ассура и И. И. Артоболевского излагаются структура и классификация плоских механизмов. Выводится структурная формула кинематической цепи общего вида и рассматриваются возможные частные случаи. При решении задач кинематического анализа рычажных механизмов большое внимание уделяется аналитической кинематике этих механизмов. Излагаемые методы позволяют определять скорости и ускорения точек звеньев, угловые скорости и ускорения звеньев большой группы механизмов II и III классов. Приводится решение задачи кинематического синтеза ряда наиболее широко распространенных рычажных механизмов. В главе «Зубчатые механизмы» даны основные сведения из теории зубчатого зацепления. Рассматриваются геометрия эвольвентных профилей зубьев и их проектирование.

Определяется минимальное число зубьев зубчатого колеса из условия отсутствия подрезания профилей для случаев изготовления колес как без смещения, так и со смещением исходного контура. В общем виде рассматриваются вопросы кинематического синтеза обычных и дифференциальных механизмов. Устанавливаются необходимые условия синтеза таких механизмов.

Глава I. СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ

§ 1. Кинематические пары

Теория кинематических пар была разработана русским ученым Х. И. Гохманом и опубликована в 1890 г. Дальнейшее развитие теория получила в трудах советских ученых А. П. Малышева, В. В. Добровольского, И. И. Артоболевского и др.

Кинематической парой называется подвижное соединение двух тел. Тела, образующие пару, называются звеньями, а точка,

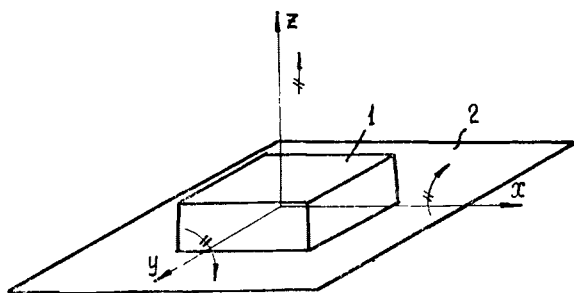


Рис. 1

линия, поверхность или их сочетание, по которым соприкасаются звенья, называются элементами. Из этого следует, что существование кинематической пары определяется тремя условиями: наличием двух звеньев, их непосредственным контактом и возможностью относительного движения звеньев, образующих кинематическую пару. Пара перестает существовать при отсутствии какого-либо из этих условий.

Кинематическая пара накладывает ограничения на относительное движение звеньев. Эти ограничения называются условиями связи или связями. Так, в кинематической паре, состоящей из звеньев 1 и 2 (рис. 1), невозможны относительные движения — поступательное вдоль оси z и вращательные вокруг осей x и y , так как при этих движениях нарушается контакт звеньев и пара перестает существовать.

В зависимости от числа условий связи, накладываемых парой на относительное движение звеньев, различают классы кинематических пар. Класс кинематической пары определяется числом условий связи.

Свободное твердое тело в пространстве (рис. 2) может иметь шесть движений — шесть степеней свободы: это поступательное движение вдоль и вращательное вокруг каждой из осей. Обозначим через S число условий связи и через H число степеней свободы в кинематической паре. Тогда

$$H = 6 - S \text{ и } S = 6 - H. \quad (1)$$

Следует обратить внимание на то, что винтовая кинематическая пара (рис. 3, а) имеет два относительных движения и, казалось бы, ее следует отнести к парам 4-го класса, так как число условий связи $S = 6 - H = 6 - 2 = 4$. В действительности винтовая пара имеет только одно *независимое* относительное движение, поскольку осевое перемещение связано с вращательным зависимостью $x = f(\varphi)$, определяемой углом подъема и шагом винтовой нарезки. Поэтому винтовая пара имеет число связей $S = 6 - H = 6 - 1 = 5$ и относится к парам 5-го класса.

Это согласуется с частным случаем винтовой пары. Например,

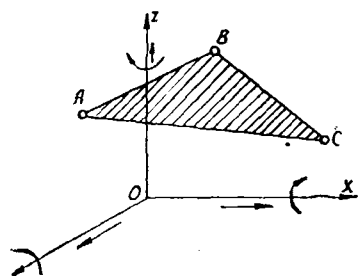


Рис. 2

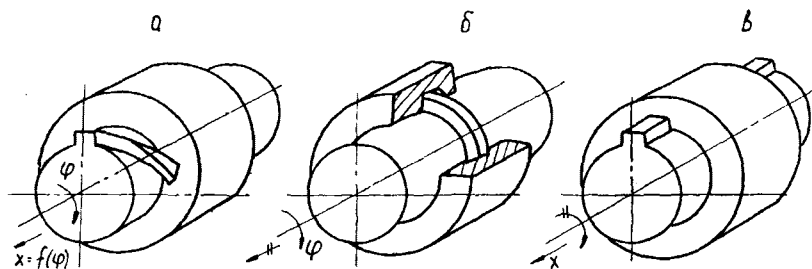


Рис. 3

при угле подъема винтовой линии, равном 0° , нарезка выполняется в виде кольцевого выступа (рис. 3, б), и винтовая пара преобразуется во вращательную пару 5-го класса. При угле же подъема винтовой нарезки, равном $\frac{\pi}{2}$, она образует выступ, расположенный вдоль оси пары (рис. 3, в), и становится поступательной парой 5-го класса.

Таким образом, при рассмотрении кинематических пар, а в дальнейшем и их сочетаний учитываются только *независимые* движения.

§ 2. Кинематические цепи. Механизмы

Кинематической цепью называется сочетание звеньев, входящих в кинематические пары. Кинематическая цепь может быть *незамкнутой*, когда в ней имеются звенья со свободными элементами

кинематических пар (рис. 4, а), и *замкнутой*, когда в ней нет звеньев, имеющих свободные элементы кинематических пар (рис. 4, б).

В самом общем случае кинематическая цепь может состоять из m звеньев, входящих в p_1 пар 1-го класса, p_2 пар 2-го класса, p_3 пар 3-го класса, p_4 пар 4-го класса и p_5 пар 5-го класса. Тогда на основании выражения (1) число степеней свободы кинематической цепи

$$H = 6m - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (2)$$

Обычно число степеней свободы кинематической цепи рассматривают относительно одного какого-либо звена, принятого за неподвижное. В этом случае имеется $n = m - 1$ подвижных звеньев. Число степеней свободы, которое обозначают через W , называется числом степеней подвижности:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3)$$

Механизмом называется такая кинематическая цепь, в которой при заданном законе движения одного или нескольких звеньев все остальные звенья движутся вполне определенным образом.

В каждом механизме имеется 3 группы звеньев.

1. Стойка — неподвижное звено. Стойка в механизме может быть только одна, так как все неподвижные звенья являются единым целым.

2. Ведущие звенья — это звенья, закон движения которых задан. Так как законы движения ведущих звеньев могут быть заданы произвольно, т. е. они являются независимыми, то число ведущих звеньев в механизме равно W — числу степеней подвижности, которое в соответствии с выражением (3) определяет число независимых движений в механизме.

3. Ведомые звенья — это звенья, закон движения которых определяется движением ведущих звеньев.

Выражение (3) носит название структурной формулы механизма, так как полностью определяет строение механизма. Действительно, величина W показывает число ведущих звеньев, n — число всех подвижных звеньев механизма, а p — число пар различных классов.

Кинематические пары накладывают на относительное движение звеньев определенные условия связи. В механизме имеется несколько кинематических пар, поэтому может оказаться, что некоторые условия связи будут общими, например, все кинематические пары могут исключать движение вдоль оси x .

В зависимости от количества этих общих условий связи различают семейства механизмов. Номер семейства механизмов определяется числом общих условий связи. Для каждого семейства механиз-

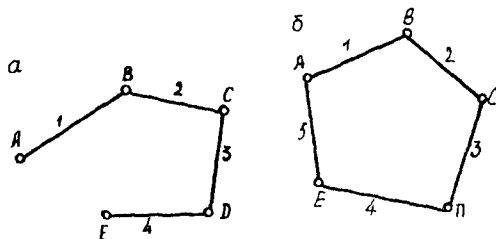


Рис. 4

мов применима своя структурная формула. Если в механизме нет общих условий связи, то это механизм нулевого семейства. Его структурной формулой будет уже известная формула (3).

Структурная формула для механизма 1-го семейства

$$W = 5n - 4\rho_5 - 3\rho_4 - 2\rho_3 - \rho_2. \quad (4)$$

Это объясняется тем, что при наличии одного общего условия связи каждое звено имеет уже не 6 степеней свободы, а только 5, поэтому в выражении (4) первый член будет равен $5n$. Пара 5-го класса накладывает 5 условий связи на относительное движение звеньев, но одно условие связи учтено как общее в первом члене выражения (4), поэтому пара 5-го класса уже будет накладывать только 4 условия связи, и второй член в выражении (4) будет равен $4\rho_5$ и т. д.

Структурная формула для механизма 2-го семейства

$$W = 4n - 3\rho_5 - 2\rho_4 - \rho_3, \quad (5)$$

3-го семейства

$$W = 3n - 2\rho_5 - \rho_4, \quad (6)$$

4-го семейства

$$W = 2n - \rho_5, \quad (7)$$

5-го семейства

$$W = n, \quad (8)$$

т. е. механизмы 5-го семейства представляют собой пары 5-го класса.

Все эти структурные формулы можно объединить формулой В. В. Добровольского:

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=5}^{k=m+1} (k - m)\rho_k, \quad (9)$$

где m — количество общих связей, $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; k — номер класса кинематической пары, $k = 5, 4, 3, 2, 1$; n — число подвижных звеньев механизма.

§ 3. Плоские механизмы

К плоским механизмам относятся такие механизмы, звенья которых перемещаются либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях. Такое ограничение в движении звеньев плоских механизмов определяет наличие трех общих условий связи. Действительно, если предположить, что звенья плоского механизма перемещаются в плоскости xOz (рис. 5), то этим исключаются вращательные движения вокруг осей x и z и поступательное вдоль оси y . Таким образом, плоские механизмы относятся в общем случае к механизмам 3-го семейства и для них справедлива формула (6):

$$W = 3n - 2\rho_5 - \rho_4.$$

Эта формула была предложена академиком П. Л. Чебышевым в 1869 году и носит его имя.

Иногда это выражение записывается в виде

$$W = 3n - 2\rho_n - \rho_{n-1}, \quad (10)$$

где p_n — низшие кинематические пары, у которых элементом является поверхность или сочетание поверхностей (обычно это пары 5-го класса); p_v — высшие кинематические пары, у которых элементом является линия или точка (обычно это пары 4-го класса).

В табл. 1 показаны основные условные обозначения звеньев и кинематических пар в плоских механизмах. Следует обратить внимание на то, что условное обозначение звена не определяет его конструктивной формы, т. е. конструктивная форма звена может быть различной, а условное обозначение одним и тем же.

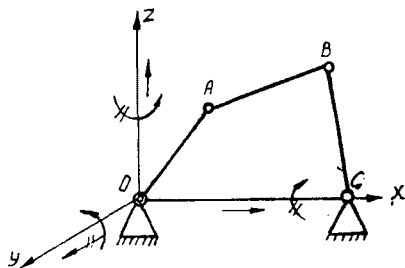


Рис. 5

Замена в плоских механизмах пар 4-го класса (высших) кинематическими цепями, содержащими пары 5-го класса (низшие). В общем случае плоский механизм состоит из звеньев, входящих в пары 4-го и 5-го классов. В дальнейшем будет показано, что многие методы решения самых разнообразных задач применимы для плоских механизмов, которые содержат звенья, входящие только в пары 5-го класса. Чтобы применить эти методы для механизмов, содержащих и пары 4-го класса, необходимо пары 4-го класса на чертеже заменить кинематической цепью, в которой имеются только пары 5-го класса. Таким образом, любой плоский механизм на чертеже может быть представлен после замены как механизм, состоящий из звеньев, входящих только в пары 5-го класса. Не следует думать, что пары 4-го класса чем-то не удовлетворяют при эксплуатации машины. Они так же широко распространены в машинах, как и пары 5-го класса. Например, все виды зубчатого зацепления представляют собой пары 4-го класса.

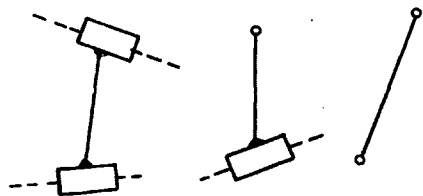


Рис. 6

Пусть имеется механизм с числом степеней подвижности W_0 . В этом механизме требуется заменить одну пару 4-го класса кинематической цепью, содержащей только пары 5-го класса. Если можно заменить одну пару 4-го класса, то таким же путем можно заменить и вторую, и третью, и остальные пары 4-го класса, имеющиеся в механизме. Замену можно произвести на следующих условиях:

а) число степеней подвижности механизма после замены не меняется;

б) относительное движение звеньев механизма сохраняется.

Если убрать из механизма одну пару 4-го класса, то число степеней подвижности будет $W_0 + 1$, так как одна пара 4-го класса лишает плоский механизм одной степени подвижности. В этом случае

число степеней подвижности увеличивается на единицу. Если вместо этой пары 4-го класса к механизму добавить кинематическую цепь, которая состоит из звеньев, входящих в пары 5-го класса, то число степеней подвижности механизма будет $W_0 + 1 + 3n - 2p_5$, так как

Таблица 1

Условные обозначения звеньев и кинематических пар плоских механизмов

Наименование	Условные обозначения
Звено, входящее в две вращательные пары 5-го класса	Конструктивная форма 
Звено, входящее в три вращательные пары 5-го класса, лежащие на одной прямой	
Звено, входящее в три вращательные пары 5-го класса, не лежащие на одной прямой	
Два звена, входящие во вращательную пару 5-го класса	
Два звена, входящие в поступательную пару 5-го класса	
Звено и стойка, входящие во вращательную пару 5-го класса	
Звено и стойка, входящие в поступательную пару 5-го класса	
Пара 4-го класса	

в добавленной цепи оно равно $3n - 2p_5$. На основании первого условия замены имеем

$$W_0 + 1 + 3n - 2p_5 = W_0.$$

Отсюда соотношение между числом звеньев и пар 5-го класса в заменяющей цепи

$$n = \frac{2p_5 - 1}{3}.$$

Простейшая кинематическая цепь представляет собой одно звено ($n=1$), входящее в две пары 5-го класса ($p_5=2$), так как n и p_5 — целые числа. Такое звено может входить как во вращательные, так

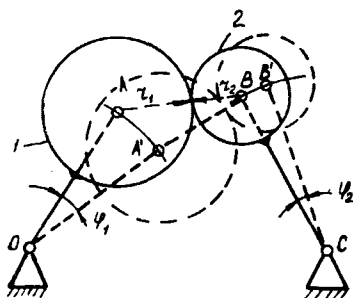


Рис. 7

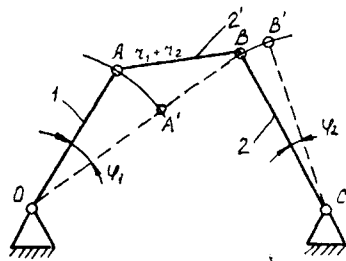


Рис. 8

и в поступательные пары 5-го класса (рис. 6). Таким образом, одну пару 4-го класса можно заменить одним звеном, входящим в две пары 5-го класса.

В механизме (рис. 7) заменим пару 4-го класса, профилями звеньев которой являются две окружности с центрами в точках A и B . При перемещении звена 1 на угол φ_1 звено 2 повернется на угол φ_2 , при этом расстояние между центрами A и B останется неизменным: $r_1 + r_2$. Пару 4-го класса заменим звеном $AB = r_1 + r_2$, входящим в две вращательные пары 5-го класса A и B (рис. 8). Относительное движение звеньев 1 и 2 будет таким же, как и в первоначальном механизме, т. е. перемещение звена 1 на угол φ_1 также определяет поворот звена 2 на угол φ_2 . Число степеней подвижности в этом механизме будет равно первоначальному, так как одна пара 4-го класса заменена звеном, входящим в две пары 5-го класса, т. е. такой кинематической цепью, которая, как это было доказано, обеспечивает неизменность числа степеней подвижности. Действительно, для первоначального механизма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1,$$

для механизма после замены

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

После замены механизм (см. рис. 8) уже будет другим, так как добавилось звено 2' и изменились кинематические пары. Однако звенья 1 и 2 остались, поэтому какая бы ни была поставлена задача для первоначального механизма, всегда в решение войдет все, что касается этих звеньев.

Если профили звеньев пары 4-го класса представляют собой кривые переменной кривизны (рис. 9, а), то в рассматриваемый момент отыскиваем центры кривизны этих кривых A и B , располагающиеся на нормали $N-N$. Радиусами кривизны ρ_1 и ρ_2 проводим две окружности. Этот случай уже рассмотрен. Заменяющий механизм (рис. 9, б) является мгновенным, так как через некоторый промежуток времени относительное расположение звеньев будет уже иным, и длины звеньев в заменяющем механизме также будут другими.

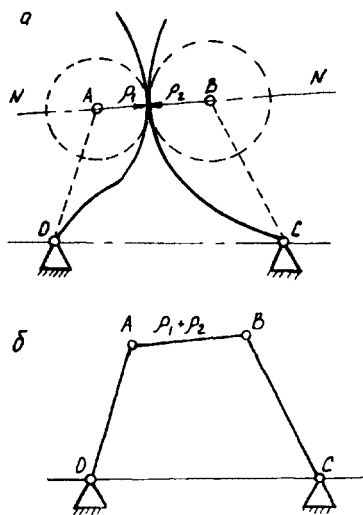


Рис. 9

В том случае, когда профилем одного из звеньев пары 4-го класса является точка (рис. 10, а, точка B), в заменяющем механизме одна из пар, в которую входит заменяющее звено, совпадает с этой точкой (рис. 10, б). Если же профиль одного из звеньев пары 4-го класса — прямая (рис. 11, а), то центр кривизны располагается в бесконечности. Относительное вращательное движение с центром, находящимся в бесконечности, можно представить как поступательное. Звено, заменяющее пару 4-го класса, в этом случае входит в поступательную и вращательную пары (рис. 11, б).

Классификация плоских механизмов. Удобная классификация плоских механизмов была разработана профессором Л. В. Ассуром и опубликована в 1916 году. Дальнейшее развитие она получила в трудах академика И. И. Артоболовского.

Механизмом 1-го класса называется звено и стойка, входящие во вращательную пару 5-го класса (рис. 12). Степень подвижности такого механизма $W=1$ и определяется заданным законом движения $\omega=f(t)$ ведущего звена 1.

Группой (группой Ассура) называется такая простейшая незамкнутая кинематическая цепь, которая после присоединения крайними свободными элементами кинематических пар к стойке будет обладать нулевой степенью подвижности. Полагаем, что группа состоит из звеньев, входящих только в пары 5-го класса (пары 4-го класса можно не рассматривать, так как они могут быть заменены). Следовательно, для групп

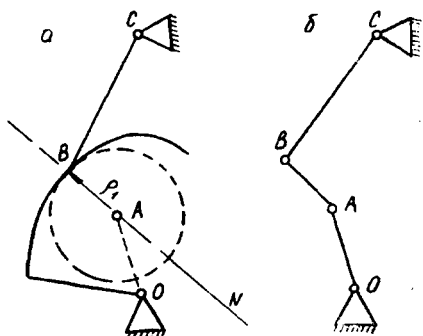


Рис. 10

мы имеем $W = 3n - 2p_5 = 0$, откуда $n = \frac{2}{3} p_5$. Так как количество пар и звеньев может быть только целым, численные значения n и p_5 в группе могут быть

$$\begin{array}{cccc} p_5 & 3 & 6 & 9 \dots \\ n & 2 & 4 & 6 \dots \end{array}$$

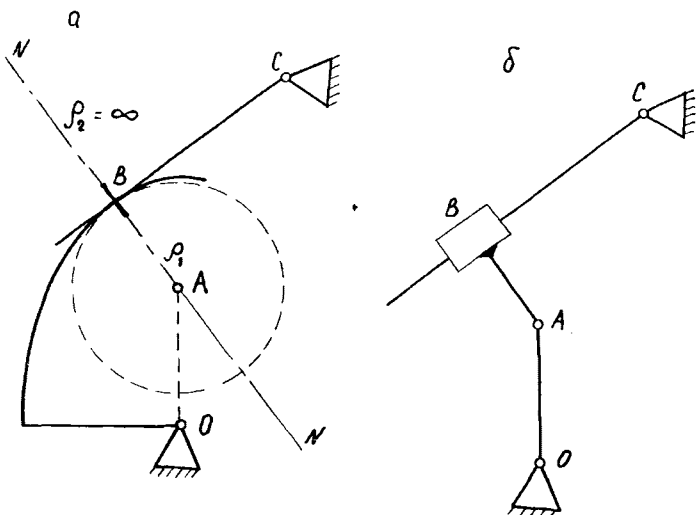


Рис. 11

На рис. 13 показана простейшая группа, состоящая из двух звеньев и трех вращательных пар 5-го класса.

Более сложные группы приведены на рис. 14. Каждая группа включает в себя контуры различных классов (рис. 15): контур 2-го класса (рис. 15, а), 3-го класса (рис. 15, б), 4-го класса (рис. 15, в).

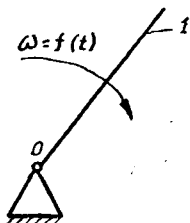


Рис. 12

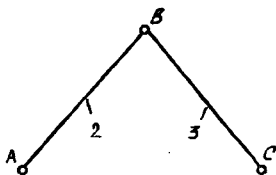


Рис. 13

Класс контура определяется числом кинематических пар, в которые входят звенья контура. Класс группы определяется классом наивысшего по классу контура, входящего в группу. На рис. 16 показаны группы различных классов: группа 2-го класса 2-го по-

рядка (рис. 16, а), 3-го класса 3-го порядка (рис. 16, б), 4-го класса 2-го порядка (рис. 16, в).

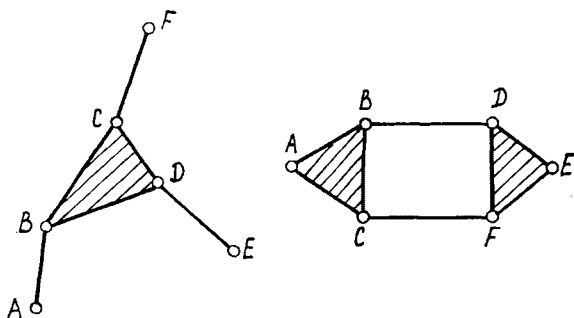


Рис. 14

Порядок группы определяется числом крайних свободных элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к механизму.

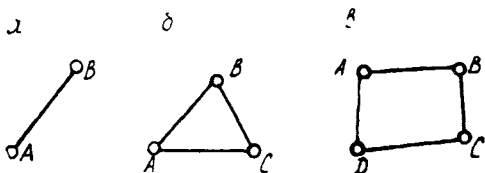


Рис. 15

Плоские механизмы образуются путем последовательного присоединения групп к одному (рис. 17, а) или нескольким механизмам 1-го класса (рис. 17, б). При этом группа присоединяется к двум или более звеньям. После присоединения группа обладает нулевой степенью подвижности, поэтому число степеней подвижности механизма всегда равно числу механизмов 1-го класса, т. е. числу ведущих звеньев.

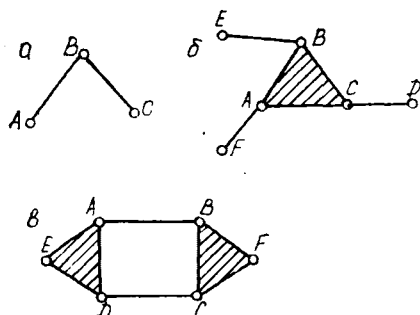


Рис. 16

Каждая последующая группа может присоединяться в механизме к любой точке звена. В этом случае звено будет входить уже не в две кинематические пары, как например звено AB (рис. 18), а в три — A , B и D . Однако это не означает, что при такой последовательности присоединения групп к ведущему звену OA и стойке образуется контур 3-го класса. Здесь надо иметь в виду, что пара D образовалась в результате присоединения последующей группы.

В плоский механизм могут входить группы различных классов. Класс механизма определяется классом высшей по классу

группы, входящей в механизм. Порядок расчленения механизма на группы будет обратным порядку присоединения групп к механизму 1-го класса. Поэтому при расчленении механизма на группы вначале устанавливают ведущее звено (звено 1 на рис. 19), а затем с конца механизма выделяют группы. В одном и том же механизме можно получить различные группы, если принять ведущие звенья различными. Так, рассмотренный механизм при ведущем звене OA состоит из двух групп: группы 3-го класса (рис. 19, а) и группы 2-го класса (рис. 19, б). При ведущем же звене CF этот механизм будет состоять уже из трех групп 2-го класса. Этим свойством можно пользоваться при проведении кинематических расчетов.

При последовательном отсоединении групп от механизма число степеней подвижности механизма без отсоединенной группы должно быть неизменным, так как степень подвижности присоединенной группы равна нулю.

Группы 2-го класса в зависимости от количества и взаимного расположения вращательных и поступательных пар 5-го класса образуют 5 видов (рис. 20). Шестого вида, включающего только одни поступательные пары, не может быть. Действительно, если представить себе группу 2-го класса, состоящую из звеньев, входящих только в поступательные пары 5-го класса, то после присоединения такой кинематической цепи к стойке (рис. 21) число степеней подвижности не будет равно нулю, так как при некотором перемещении звена 1 переместится и звено 2. Следовательно, данная кинематическая цепь будет не группой, а механизмом. Это не является каким-либо исключением из ранее принятых положений и объясняется тем, что наличие только поступательных пар приводит к дополнительному общему условию связи — невозможности вращения вокруг оси y (см. рис. 5). Таким образом, здесь уже 4 общих условия связи, поэтому

$$W = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

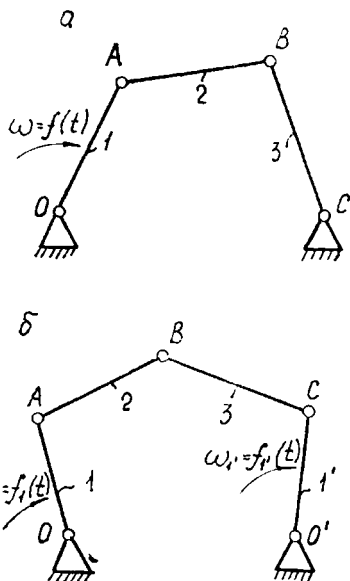


Рис. 17

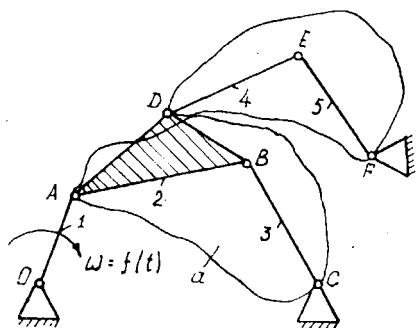


Рис. 18

кинематическая цепь будет не группой, а механизмом. Это не является каким-либо исключением из ранее принятых положений и объясняется тем, что наличие только поступательных пар приводит к дополнительному общему условию связи — невозможности вращения вокруг оси y (см. рис. 5). Таким образом, здесь уже 4 общих условия связи, поэтому

В группах 3-го и других классов также могут быть как вращательные, так и поступательные кинематические пары 5-го класса. Однако различать виды этих групп не имеет смысла из-за большого разнообразия сочетаний пар в этих группах. Пользуясь рассмотренной классификацией, можно путем различного сочетания групп и механизмов 1-го класса получать простые и сложные механизмы

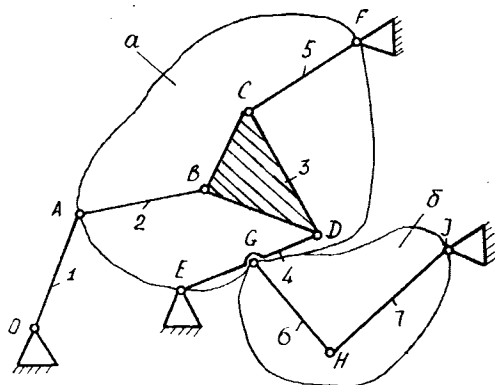


Рис. 19

и вместе с тем контролировать возможность относительного движения звеньев в самых сложных кинематических схемах. Кроме того, данная классификация имеет еще одно чрезвычайно важное достоинство,

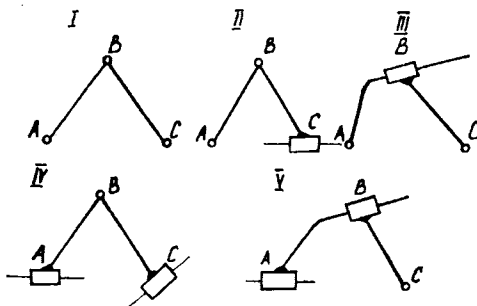


Рис. 20

которое заключается в том, что групп очень мало (групп 2-го класса всего 5), а различных механизмов тысячи. Поэтому, расчленив механизм на группы, достаточно уметь решать задачи ТММ для групп, число которых ограничено. Этим определяется возможность решения задач для всего многообразия плоских механизмов. В дальнейшем многие задачи ТММ будут решаться не для каждого конкретного механизма, а для различных групп.

§ 4. Лишние степени подвижности и пассивные условия связей

На рис. 22, *a* показан четырехзвенный механизм, состоящий из трех подвижных звеньев, входящих в три пары 5-го класса и одну пару 4-го класса. Очевидно, что число степеней подвижности у этого механизма равно единице, т. е. движение звена *OA* определяет движение всех остальных звеньев. Вместе с тем, если определить W этого механизма по формуле П. Л. Чебышева, то

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 =$$

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2,$$

т. е. фактическое число степеней подвижности не всегда соответствует расчетному. Объясняется это наличием в механизме так называемых *лишних степеней подвижности*.

В рассматриваемом механизме звено 3 может пробуксовывать по направляющей стойки и создавать лишнюю степень подвижности,

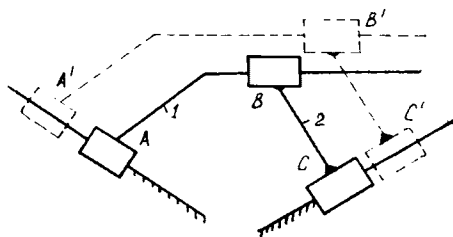


Рис. 21

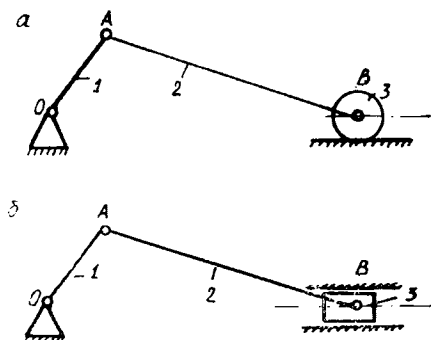


Рис. 22

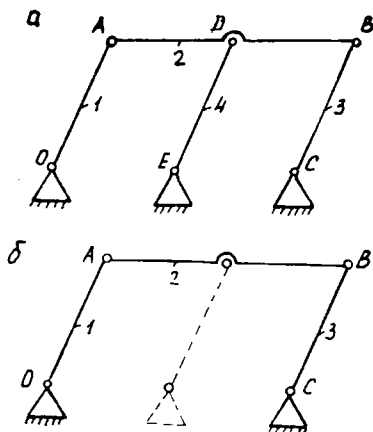


Рис. 23

которая не определяет относительного движения других звеньев. Поэтому, прежде чем определять по формуле W , необходимо устранить лишние степени подвижности. В механизме, изображенном на рис. 22, *a*, это можно сделать путем изменения элемента пары звена 3 так, как показано на рис. 22, *б*. В этом случае пара 4-го класса превращается в поступательную пару 5-го класса, а $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$, т. е. соответствует действительному.

В механизме, приведенном на рис. 23, длины противоположных звеньев одинаковы. В этом механизме $W = 1$, так как движение звена *OA* определяет движение всех остальных звеньев. По формуле же $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$.

В рассматриваемом механизме пары D и E с входящим в них звеном 4 образуют пассивные условия связи, т. е. такие связи, которые не ограничивают движения остальных звеньев. Действительно, если убрать звено 4 и пары D и E (рис. 23, б), то движение остальных звеньев по-прежнему будет определяться движением звена OA . В этом случае расчетное $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$, т. е. соответствует действительному. Следовательно, прежде чем рассчитывать W , необходимо найти и устранить пассивные условия связи.

Общих методов отыскания лишних степеней подвижности и пассивных условий связи нет, поэтому приходится полагаться на личный опыт, приобретаемый по мере изучения курса ТММ.

Глава II. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В задачи кинематического анализа входят определение положений звеньев; нахождение скоростей точек и угловых скоростей звеньев; определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев. Решение этих задач в зависимости от их условий и необходимой точности может быть получено тремя методами — при помощи построения планов скоростей и ускорений, методом кинематических диаграмм и аналитическим путем.

§ 5. Построение планов скоростей и ускорений

При построении планов скоростей и ускорений для различных механизмов удобно пользоваться результатами решения некоторых общих задач.

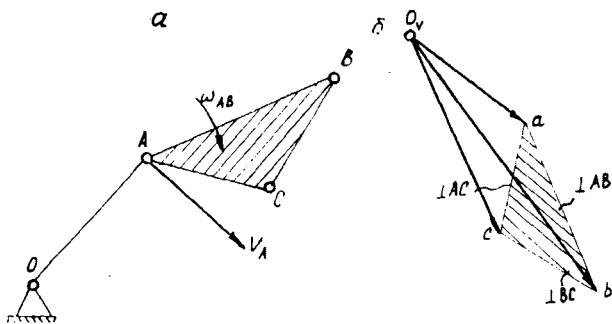


Рис. 24

Задача 1. Скорости точек жесткого звена, входящего во вращательную пару 5-го класса с другим звеном. Принцип подобия в плане скоростей.

Дано: два звена, входящих во вращательную пару 5-го класса (рис. 24, а), скорость v_A точки A и угловая скорость ω_{AB} звена ABC . Требуется определить скорости v_B и v_C точек B и C .

Рассматривая движение точки B совместно с точкой A (переносное движение) и относительно нее, определяем скорость точки B

$$v_B = v_A + v_{BA}, \quad (11)$$

где $v_{BA} = \omega_{AB} (AB)$ и $v_{BA} \perp AB$.

Рассматривая движение точки C совместно с точкой A и относительно нее, определяем скорость точки C

$$v_C = v_A + v_{CA}, \quad (12)$$

где $v_{CA} = \omega_{AB}(AC)$ и $v_{CA} \perp AC$.

Построим векторы v_B и v_C . Примем масштаб построения плана скоростей (k_v — масштабный коэффициент)

$$k_v = \frac{\text{истинное значение скорости, м/с}}{\text{длина отрезка на чертеже, мм}}$$

Выберем точку O_v — полюс плана скоростей — и построим в масштабе k_v уравнение (11), принимая точку O_v за начало построения.

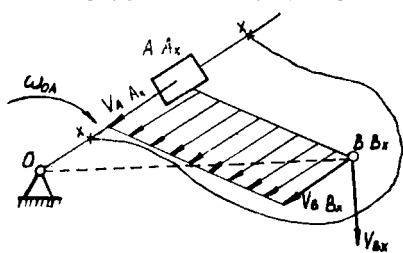


Рис. 25

Начало вектора v_A будет в точке O_v , а конец обозначим через a (рис. 24, б). Из точки a проведем отрезок — вектор $v_{BA} \perp AB$, конец которого обозначим через b . Суммарный вектор v_B пойдет из точки O_v — начала построения — до точки b .

Строим уравнение (12). Вектор v_A уже построен, поэтому к его концу достаточно пристроить вектор $v_{CA} \perp AC$, конец которого обозначим буквой c .

Скорость v_C точки C можно определить несколько иначе, рассматривая движение точки C совместно с точкой B и относительно нее, тогда

$$v_C = v_B + v_{CB}, \quad (13)$$

где $v_{CB} = \omega_{AB}(BC)$ и $v_{CB} \perp BC$ (см. рис. 24, б).

Абсолютная скорость точки в плане скоростей является вектором, имеющим начало в полюсе и конец в точке, скорость которой определяется (например, скорость v_B точки B на плане скоростей будет вектор O_vb).

Относительные скорости в плане скоростей читаются обратно наименованию скорости (например, скорость v_{BA} читается ab , v_{CA} — ac и т. п.). Этим определяется направление скорости. Вектор скорости v_B точки B будет направлен слева направо вниз, а вектор v_{BA} — от точки a к точке b . Величины скоростей $v_B = k_v(O_vb)$ и $v_{BA} = k_v(ab)$.

В результате построения плана скоростей получен $\triangle abc$, который подобен $\triangle ABC$ как треугольник с взаимно перпендикулярными сторонами. Это позволяет установить принцип подобия в плане скоростей.

В плане скоростей векторы относительных скоростей точек жесткого звена образуют фигуру, подобную звену, повернутую на угол 90° в сторону угловой скорости звена.

Пользуясь принципом подобия, достаточно на плане скоростей построить скорости только двух точек жесткого звена (например, точек A и B на рис. 24, а). Скорость же любой третьей точки определится путем построения на отрезке относительной скорости (отрезок ab на рис. 24, б) подобной фигуры.

Задача 2. Скорости точек звена, входящего в поступательную пару 5-го класса с другим звеном (рис. 25).

Дано: угловая скорость ω_{OA} звена OA и относительная скорость звена AB , направленная вдоль звена OA . Обозначим направляющую — звено OA — через xx , а скорость относительного движения — через v_{AA_x} , точка A принадлежит звену AB , а точка A_x — направляющей xx и совпадает в рассматриваемый момент времени с точкой A .

Для определения скорости точки B направляющую xx расширим в плоскости чертежа и на расширенной ее части пометим точку B_x , которая совпадает с точкой B . Таким образом, точки B и B_x , хотя и совпадают в данный момент времени, но принадлежат различным звеньям. Рассматривая движение точки B совместно с точкой B_x и относительно нее, получим

$$v_B = v_{B_x} + v_{BB_x}. \quad (14)$$

Здесь v_{B_x} (скорость точки B_x) известна, т. е. она непосредственно может быть определена из заданных условий $v_{B_x} = \omega_{OA}(OB_x)$ или, что то же самое, $v_{B_x} = \omega_{xx}(OB)$, так как $\omega_{xx} = \omega_{OA}$. Звено AB относительно направляющей xx движется поступательно, поэтому $v_{BB_x} = v_{AA_x}$, так как в поступательном движении скорости всех точек одинаковы. Скорость v_B точки B может быть определена путем построения суммы двух векторов в соответствии с уравнением (14).[†]

В дальнейшем будем предполагать, что если известна угловая скорость направляющей, то известна и скорость любой ее точки, т. е. скорость точки направляющей может быть определена из заданных условий, как это было сделано для точки B_x .

Задача 3. Ускорения точек жесткого звена, входящего во вращательную пару 5-го класса с другим звеном. Принцип подобия в плане ускорений. При решении задач на ускорение будем считать, что все скорости известны.

Полагаем известным ускорение w_A точки A (рис. 26) и угловое ускорение ϵ_{AB} звена ABC . Определим ускорение w_B и w_C .

Ускорение точки B получим из уравнения

$$w_B = w_A + w_{BA}. \quad (15)$$

Полное относительное ускорение w_{BA} точки B относительно точки A представим в виде суммы

$$w_{BA} = w_{BA}^n + w_{BA}^t, \quad (16)$$

где $w_{BA}^n = \omega_{BA}^2(AB)$ — нормальное ускорение точки B относительно точки A ; $w_{BA}^t \parallel \overleftarrow{AB}$ — направлено от точки B к точке A ; $w_{BA}^t =$

$= \varepsilon_{AB}(AB)$ — касательное ускорение; $\omega_{BA}^t \perp AB$ — направлено в сторону углового ускорения ε_{AB} .

Подставляя значение ω_{BA} по выражению (16) в уравнение (15), получим

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^t. \quad (17)$$

Построим уравнение (17). Примем для построения масштаб плана ускорений

$$k_w = \frac{\text{истинное значение ускорения, м/с}^2}{\text{длина отрезка на чертеже, мм}}.$$

Выберем точку O_w — полюс плана ускорений. В масштабе k_w от точки O_w строим правую часть уравнения — сумму ускорений. Уско-

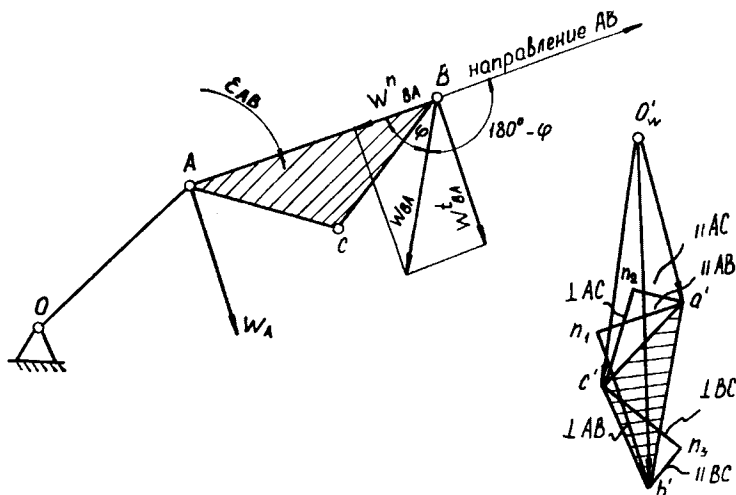


Рис. 26

рение точки B в масштабе построения определится замыкающим вектором $O_w b'$. Ускорение точки C может быть определено путем построения на плане ускорений уравнения

$$\omega_C = \omega_A + \omega_{CA}^n + \omega_{CA}^t, \quad (18)$$

где

$$\omega_{CA}^n + \omega_{CA}^t = \omega_{CA}; \quad (19)$$

$\omega_{CA}^n = \omega_{AB}^2(AC)$ — нормальное ускорение точки C относительно точки A ; $\omega_{CA}^n \parallel \overline{AC}$; ω_{CA}^t — касательное ускорение точки C относительно точки A ; $\omega_{CA}^t = \varepsilon_{AB}(AC)$; $\omega_{CA}^t \perp AC$.

Ускорение точки C можно определить несколько иначе, если рассмотреть движение точки C совместно с точкой B и относительно нее. В этом случае уравнение для определения ускорения точки C будет

$$\omega_C = \omega_B + \omega_{CB}^n + \omega_{CB}^t, \quad (20)$$

где

$$\omega_{CB}^n = \omega_{AB}^2(BC) \parallel \overleftarrow{BC}; \quad \omega_{CB}^t = \varepsilon_{AB}(BC) \perp BC$$

и

$$\omega_{CB}^n + \omega_{CB}^t = \omega_{CB}. \quad (21)$$

Значения полных относительных ускорений

$$\left. \begin{aligned} \omega_{BA} &= \sqrt{(\omega_{BA}^n)^2 + (\omega_{BA}^t)^2} = AB \sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}; \\ \omega_{CA} &= \sqrt{(\omega_{CA}^n)^2 + (\omega_{CA}^t)^2} = AC \sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}; \\ \omega_{CB} &= \sqrt{(\omega_{CB}^n)^2 + (\omega_{CB}^t)^2} = BC \sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

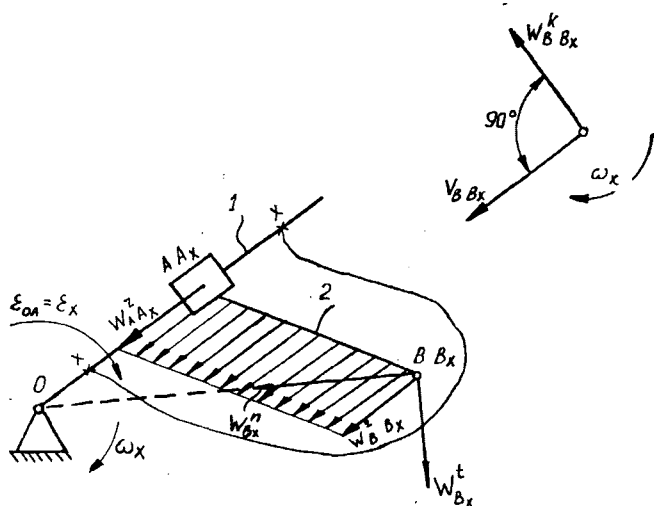


Рис. 27

Тангенс угла φ , определяющего направление полного относительного ускорения (см. рис. 26),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_{BA}^t}{\omega_{BA}^n} = \frac{\varepsilon_{AB}(AB)}{\omega_{AB}^2(AB)} = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2}, \quad (23)$$

т. е. тангенс угла φ не зависит от того, какое относительное ускорение рассматривается, и одинаков для всех ускорений.

Выражения (22) и (23) показывают, что полные относительные ускорения точек жесткого звена ABC пропорциональны длинам звеньев жесткого звена и повернуты на один и тот же угол. Следовательно, в плане ускорений $\triangle a'b'c' \sim \triangle ABC$. Это позволяет установить принцип подобия в плане ускорений.

В плане ускорений полные относительные ускорения точек жесткого звена образуют фигуру, подобную звену, повернутую относительно него на угол $180^\circ - \varphi$ в сторону его углового ускорения (см. рис. 26). Пользуясь принципом подобия, достаточно определить ускорения двух точек жесткого звена. Ускорения других точек звена могут быть получены путем построения подобной фигуры на отрезке прямой между этими двумя точками.

Задача 4. Ускорения точек звена, входящего в поступательную пару 5-го класса с другим звеном (рис. 27).

Полагаем заданным угловое ускорение ϵ_{OA} звена OA и относительное ускорение звена AB вдоль звена OA . Как и в задаче 2, покажем точки A_x и B_x . Обозначим направляющую через xx , а относительное ускорение через w'_{AA_x} .

Ускорение точки B выразится зависимостью $w_B = w_{B_x} + w_{BB_x}$, но $w_{BB_x} = w_{BB_x}^k + w'_{BB_x}$, где $w_{BB_x}^k$ — кориолисово ускорение, так как переносное движение будет вращательным с угловой скоростью ω_{OA} ; w'_{BB_x} — относительное ускорение в поступательном движении вдоль направляющей xx . Тогда

$$w_B = w_{B_x} + w_{BB_x}^k + w'_{BB_x}, \quad (24)$$

где w_{B_x} — ускорение точки B_x — полагается известным, так как его можно рассчитать по заданным параметрам.

Действительно,

$$w_{B_x} = \sqrt{(w_{B_x}^n)^2 + (w_{B_x}^t)^2},$$

где

$$w_{B_x}^n = \omega_x^2 (OB_x) \quad \text{и} \quad w_{B_x}^t = \epsilon_x (OB_x).$$

В дальнейшем будем полагать, что если известно угловое ускорение направляющей, то известно и ускорение любой точки направляющей. $w'_{BB_x} = w'_{AA_x}$, так как относительное ускорение поступательное, а при поступательном движении ускорения всех точек одинаковы. Величина $w_{BB_x}^k = 2\omega_x v_{BB_x}$. Направление $w_{BB_x}^k$ определится по известному из курса теоретической механики правилу (см. рис. 27), в соответствии с которым вектор относительной скорости v_{BB_x} поворачивается на угол 90° в сторону переносной угловой скорости ω_x . Полученное направление является направлением вектора $w_{BB_x}^k$.

Ускорение точки A

$$w_A = w_{A_x} + w_{AA_x}^k + w'_{AA_x}. \quad (25)$$

Здесь $w_{AA_x}^k = 2\omega_x v_{AA_x}$, но $v_{AA_x} = v_{BB_x}$, поэтому $w_{AA_x}^k = 2\omega_x v_{BB_x} = w_{BB_x}^k$, т. е. в плоских механизмах кориолисовы ускорения точек звена одинаковы в относительном движении.

Как уже было показано, все плоские механизмы образуются из групп Ассур, поэтому в дальнейшем будем рассматривать построение планов скоростей и ускорений для групп, ограниченное количество которых даст возможность строить планы скоростей и ускорений для самых разнообразных плоских механизмов. При построении планов скоростей и ускорений для групп Ассур воспользуемся результатами четырех задач. Новой будет здесь только последовательность решения и построения.

§ 6. Планы скоростей и ускорений для групп 2-го класса

Группа 1-го вида

План скоростей. Дано: v_A и v_C . Определить v_B , v_D , v_E , ω_{AB} и ω_{BC} (рис. 28). Здесь, как и в дальнейшем, следует обратить внима-

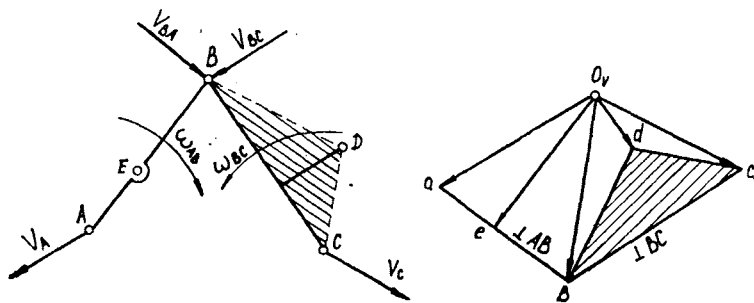


Рис. 28

ние на постановку задачи. Рассматриваемая группа является группой 2-го порядка, т. е. она присоединяется к механизму двумя крайними элементами кинематических пар A и C , поэтому известными будут кинематические параметры именно этих точек: v_A и v_C .

Итак, имеем

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

и

$$v_B = v_C + v_{BC}$$

Здесь $v_{BA} \perp AB$ и $v_{BC} \perp BC$. Строим эти уравнения на плане скоростей (см. рис. 28). В масштабе k_v от точки O_v откладываем отрезок — вектор v_A , конец которого обозначим буквой a , и через эту точку проводим прямую $\perp AB$ — направление вектора v_{BA} . Затем от точки O_v откладываем отрезок — вектор v_C , конец которого обозначаем буквой c , и через эту точку проводим прямую $\perp BC$ — направление вектора v_{BC} , пересечение прямых $\perp AB$ и $\perp BC$ даст точку b — конец вектора скорости v_B . Соединив точку b с полюсом O_v , получим вектор v_B . Скорость точки D определяем, построив на отрезке $bc \triangle bdc \sim \triangle BDC$. Полученную точку d соединяем с полюсом O_v . Скорость точки E получим, построив на отрезке ab отрезок ae отрезку AEB , точку e соединим прямой с точкой O_v . Отрезок $O_v e$ будет представлять скорость точки E в масштабе k_v .

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{(ab)k_v}{AB}$. Перенесем относительную скорость v_{BA} (на плане скоростей отрезок ab) в точку B . Направление этой скорости позволяет установить направление ω_{AB} . Угловая скорость звена BC $\omega_{BC} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{(cb)k_v}{BC}$. Направление ω_{BC} определяется аналогично предыдущему.

План ускорений. Дано: ω_A и ω_C . Определить ω_B , ω_D , ω_E , ε_{AB} , ε_{BC} (рис. 29).

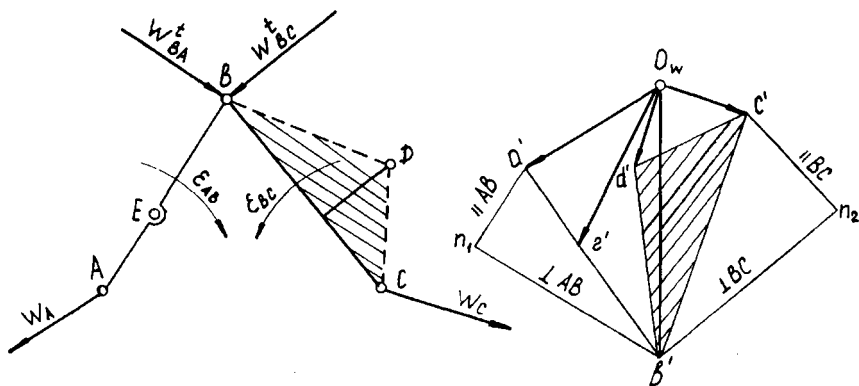


Рис. 29

Для определения ускорений точки B составляем уравнения

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^t \quad (26)$$

и

$$\omega_B = \omega_C + \omega_{BC}^n + \omega_{BC}^t \quad (27)$$

$\omega_{BA}^n = \omega_{AB}^2 (AB) \parallel \overrightarrow{AB}$; $\omega_{BA}^t \perp AB$; $\omega_{BC}^n = \omega_{BC}^2 (BC) \parallel \overrightarrow{BC}$; $\omega_{BC}^t \perp BC$.

На плане ускорений (рис. 29) строим уравнение (26). От точки O_w — полюса плана ускорений в масштабе k_w откладываем отрезок $O_w a'$, равный ω_A . Затем строим отрезок $a' n_1$, изображающий вектор ω_{BA}^n . Далее из точки n_1 проводим прямую $\perp AB$ — направление вектора ω_{BA}^t .

Строим также уравнение (27). От точки O_w откладываем отрезок $O_w c'$, равный ω_C , и отрезок $c' n_2$ — ускорение ω_{BC}^n . Затем из точки n_2 проводим прямую $\perp BC$ — направление ω_{BC}^t . Точка b' пересечения прямых, направленных $\perp AB$ и $\perp BC$, является концом вектора ускорения ω_B . Соединив точки b' и O_w , получим вектор $O_w b'$, ускорение точки B в масштабе k_w . Соединим прямыми точку b' с точками a' и c' . При этом ω_{BA} и ω_{BC} — полные относительные ускорения в масштабе k_w точки B относительно точек A и C — определяются соответственно отрезками $b'a'$ и $b'c'$.

Угловое ускорение звена AB

$$\epsilon_{AB} = \frac{\omega_{BA}^t}{AB} = \frac{(n_1 b') k_{\omega}}{AB}$$

Для определения направления углового ускорения ϵ_{AB} перенесем ω_{BA}^t в точку B группы, угловое ускорение будет направлено в сторону ω_{BA}^t . Угловое ускорение звена BC

$$\epsilon_{BC} = \frac{\omega_{BC}^t}{BC} = \frac{(n_2 b') k_{\omega}}{BC}$$

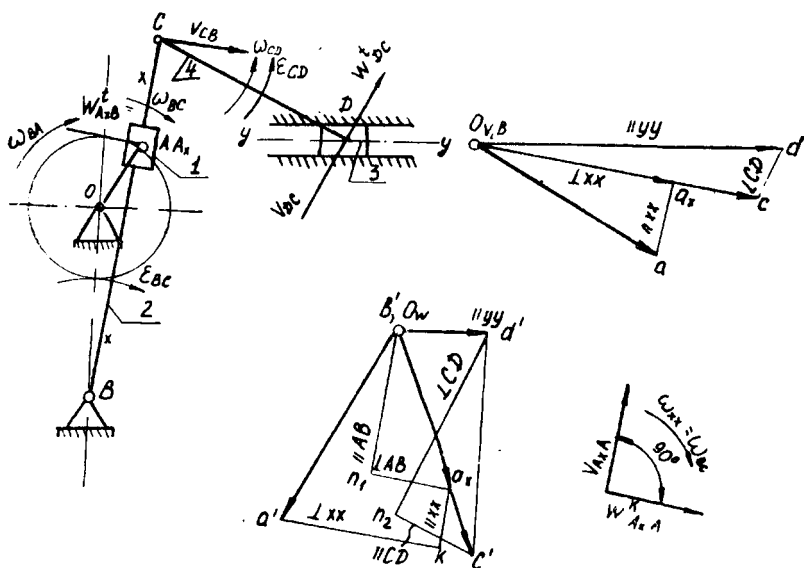


Рис. 30

Направление ϵ_{BC} определяется аналогично предыдущему. Ускорение точки D получим, построив на отрезке $b'c'$ $\triangle b'd'c' \sim \triangle BDC$ и соединив полученную таким образом точку d' с полюсом O_{ω} . Ускорение точки E определим, построив на отрезке $a'e'b'$ отрезок $a'e'b' \sim$ отрезку AEB .

Построение планов скоростей и ускорений для групп Ассуря 2-го и 3-го видов рассмотрим на примере механизма (рис. 30). Механизм состоит из механизма 1-го класса, включающего стойку и ведущее звено OA , группы 2-го класса 3-го вида, состоящей из звеньев 2 и 1, и группы 2-го класса 2-го вида, включающей звенья 4 и 3.

Для механизма дано: длины и взаимное расположение всех звеньев механизма, $\omega_{OA} = \text{const}$ — угловая скорость кривошипа OA . Определить скорости и ускорения всех точек, угловые скорости и ускорения звеньев.

Определение скоростей: находим $V_A = \omega_{OA}(OA) \perp OA$ в направлении ω_{OA} . Звено BC обозначим через xx — направляющую, вдоль кото-

рой в относительном движении перемещается ползун A . Пометим точку A_x , совпадающую с точкой A , но принадлежащую направляющей xx (звену BC). Скорости

$$v_{A_x} = v_A + v_{A_x A} \text{ и } v_{A_x} = v_B + v_{A_x B},$$

где

$$v_{A_x A} \parallel xx, \quad v_B = 0, \quad v_{A_x B} \perp xx.$$

Построим эти уравнения. Выбираем масштаб построения $k_v \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{мм}} \right]$. Из точки O_v — полюса плана скоростей (см. рис. 30) — откладываем отрезок $O_v a$ — скорость v_A в масштабе k_v , и из точки a проводим прямую $\parallel xx$ — направление вектора $v_{A_x A}$. Затем откладываем вектор v_B , но так как $v_B = 0$, то точка b будет находиться в точке O_v . Из точки b проводим прямую $\perp xx$ — направление вектора $v_{A_x B}$. Пересечение направлений $\parallel xx$ и $\perp xx$ даст точку a_x . Отрезок $O_v a_x$ — скорость v_{A_x} в масштабе k_v . Для определения скорости v_C в плане скоростей на отрезке ba_x строим отрезок $ba_x c \infty$ ∞ отрезку $BA_x C$. Следовательно, имеем $\frac{bc}{ba_x} = \frac{BC}{BA_x}$, откуда $bc = ba_x \frac{BC}{BA_x}$. На продолжении отрезка ba_x откладываем отрезок bc .

Полученный отрезок $O_v c$ — скорость v_C в масштабе k_v .

Для определения скорости точки D составляем уравнение

$$v_D = v_C + v_{DC}.$$

Здесь $v_{DC} \perp CD$ и $v_D \parallel uu$, поэтому для отыскания v_D достаточно только одного этого уравнения. Построим это уравнение. Из полюса O_v проведем прямую $\parallel uu$ — направление v_D . v_C уже построена — это отрезок $O_v c$. Из точки c проводим прямую $\perp CD$ — направление v_{DC} . Получаем точку d пересечения прямых $\parallel uu$ и $\perp CD$. Отрезок $O_v d$ — скорость v_D в масштабе k_v .

Определим угловые скорости звеньев

$$\omega_{BC} = \frac{v_{CB}}{BC} = \frac{k_v(bc)}{BC}.$$

Направление ω_{BC} определим, [переносим вектор $\overline{v_{CB}}$ в точку C механизма,

$$\omega_{CD} = \frac{v_{DC}}{CD} = \frac{k_v(cd)}{CD}.$$

Направление ω_{CD} определяем аналогичным образом.

Определение ускорений: $\omega_{OA} = \omega_{OA}^2(OA) \parallel \overrightarrow{OA}$, т. е. будет одно нормальное ускорение, так как $\omega_{OA} = \text{const}$. Ускорения точки A_x — ω_{A_x} определяются из уравнения

$$\omega_{A_x} = \omega_B + \omega_{A_x B}^n + \omega_{A_x B}^t \text{ и } \omega_{A_x} = \omega_A + \omega_{A_x A}^k + \omega_{A_x A}^r,$$

где $\omega_B = 0$, так как точка B неподвижна; $\omega_{A_x B}^n = \omega_{BC}^2 (AB) \parallel \overrightarrow{AB}$; $\omega_{A_x B}^t \perp AB$; $\omega_{A_x A}^k = 2v_{A_x A} \omega_{xx} \perp xx$; ($\omega_{xx} = \omega_{BC}$); $\omega_{A_x A}^r \parallel xx$.

Направление $\omega_{A_x A}^k$ определяется путем поворота вектора $v_{A_x A}$ в сторону ω_{xx} (см. рис. 30).

Построим уравнения. В точке O_w полюса плана ускорений помещаем точку b' , так как длина вектора $\omega_B = 0$. Затем откладываем отрезок $b'n_1 \parallel \overrightarrow{AB}$ — ускорение $\omega_{A_x B}^n$, и из точки n_1 проводим прямую $\perp AB$ — направление ускорения $\omega_{A_x B}^t$. Далее откладываем отрезок

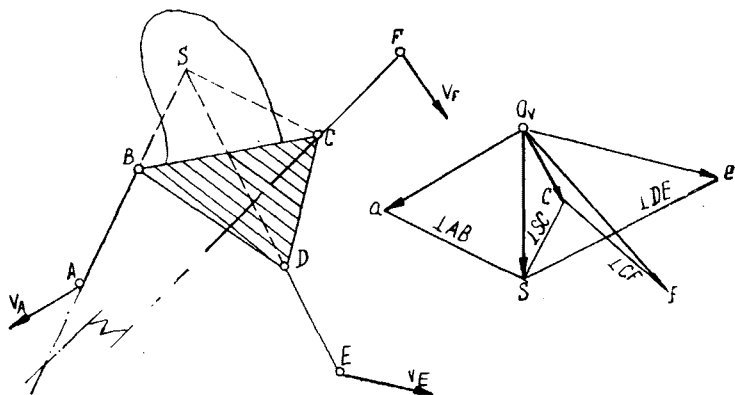


Рис. 31

$O_w a'$ — ускорение ω_A и отрезок $a'k \perp xx$ — ускорение $\omega_{A_x A}^k$. Из точки k проводим прямую $\parallel xx$ — направление $\omega_{A_x A}^r$. Точку a'_x — пересечения прямых $\perp AB$ и $\parallel xx$ соединяем с полюсом O_w . Отрезок $O_w a'_x$ — ускорение ω_{A_x} в масштабе k_w .

Ускорение точки C определяем, используя принцип подобия. На отрезке $b'a'_x$ строим отрезок $b'a'_x c' \sim$ отрезку $BA_x C$. Из соотношения $\frac{b'c'}{b'a'_x} = \frac{BC}{BA_x}$ имеем $b'c' = b'a'_x \frac{BC}{BA_x}$.

Ускорение точки D находим из уравнения

$$\omega_D = \omega_C + \omega_{DC}^n + \omega_{DC}^t,$$

где $\omega_D \parallel yy$, $\omega_{DC}^n = \omega_{CD}^2 (CD) \parallel \overrightarrow{CD}$ и $\omega_{DC}^t \perp CD$.

Построим это уравнение. Из полюса O_w проведем прямую $\parallel yy$ — направление ω_D , из точки c' — прямую $c'n_2 \parallel \overrightarrow{CD}$ — ускорение ω_{DC}^n , из точки n_2 — прямую $\perp CD$ — направление ω_{DC}^t до пересечения с прямой $\parallel yy$ в точке d' . Отрезок $O_w d'$ — ускорение ω_D в масштабе k_w . Угловое ускорение звена CD $\varepsilon_{CD} = \frac{\omega_{DC}^t}{CD} = \frac{(n_2 d') k_w}{CD}$. На-

правление этого ускорения определим, перенеся вектор ω_{DC}^t в точку D механизма. Угловое ускорение $\varepsilon_{BC} = \frac{\omega_{A_x B}^t}{AB} = \frac{(n_1 a_x') k_{\omega}}{AB}$. Направление определяется аналогично предыдущему.

§ 7. Планы скоростей и ускорений для групп 3-го класса

Группа 3-го класса (рис. 31) является группой 3-го порядка, т. е. она присоединяется к механизму тремя крайними элементами кинематических пар, поэтому заданными будут кинематические

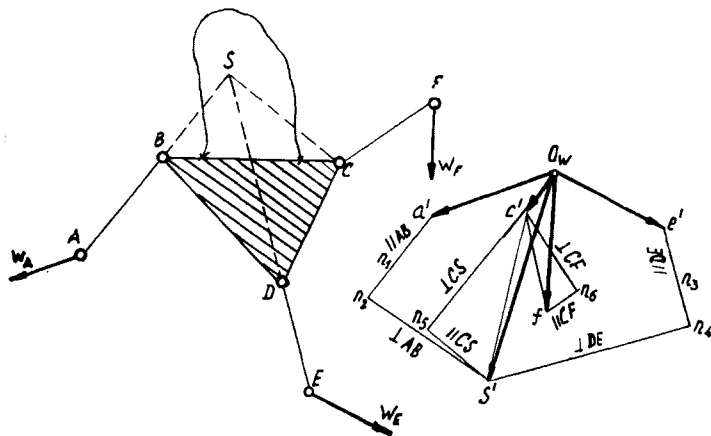


Рис. 32

параметры именно этих элементов пар. В другой постановке задача не будет иметь смысла.

План скоростей. Дано: v_A, v_E, v_F . Определить скорости точек B, C, D и угловые скорости всех звеньев.

При решении задачи будем использовать особые точки Ассур. Особая точка Ассур S (см. рис. 31) располагается на пересечении направлений каких-либо двух поводков. Следовательно, можно иметь три особые точки Ассур. Для решения задачи достаточно получить одну особую точку. Удобно принять такую из трех точек, которая располагается близко к жесткому звену BCD . Это при одном и том же масштабе k_v позволяет получить наименьшие габариты плана скоростей.

В рассматриваемом случае примем за особую точку Ассур точку S , являющуюся результатом пересечения направлений AB и DE . Звено BCD расширяем и полагаем, что точка S принадлежит этому звену. Следовательно, отрезки $BSCD$ образуют жесткое звено. Определим скорость точки S . Имеем $v_S = v_B + v_{SB}$. Но $v_B = v_A + v_{BA}$, тогда

$$v_S = v_A + \overline{v_{BA}} + v_{SB}. \quad (28)$$

Здесь $v_{BA} \perp AB$, $v_{SB} \perp BS$ или, что то же самое, $v_{SB} \perp AB$, так как направления AB и BS совпадают. Таким образом, два неизвестных вектора v_{BA} и v_{SB} имеют одно направление и в уравнение (28) входят как одно неизвестное. В этом состоит смысл особой точки Ассура. Другое уравнение для определения v_S составляют уже по аналогии с уравнением (28):

$$v_S = v_E + \overline{v_{DE}} + v_{SD}. \quad (29)$$

Здесь $v_{DE} \perp DE$ и $v_{SD} \perp DS$ или, что то же самое, $v_{SD} \perp DE$.

Построением уравнений (28) и (29) определяем точку S в плане скоростей (см. рис. 31).

Далее определяем скорость точки C — точки, которая не участвует в определении положения точки S . Точку C соединяем прямой

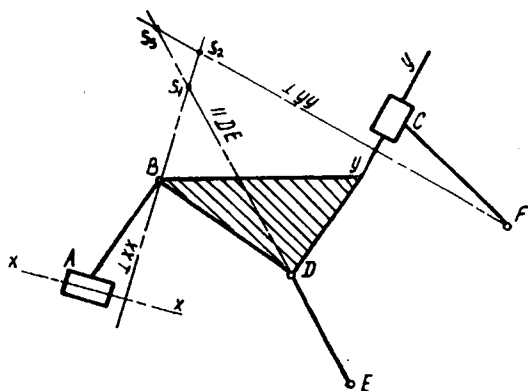


Рис. 33

с точкой S , получаем группу звеньев SCF . Такая задача уже встречалась (см. группу 2-го класса 1-го вида). Скорость точки C определяется из уравнений

$$v_C = v_S + v_{CS} \text{ и } v_C = v_F + v_{CF},$$

где $v_{CS} \perp CS$ и $v_{CF} \perp CF$.

Скорости точек B и D можно определить, построив на отрезке SC в плане скоростей фигуру $scdb$ ∼ фигуре $SCDB$. Угловые скорости, как и ранее, определяются по относительным скоростям.

План ускорений. Дано: ω_A , ω_E , ω_F . Определить ускорения точек B , C , D и угловые ускорения всех звеньев (рис. 32). Последовательность построения плана ускорений та же, что и при построении плана скоростей.

Вначале определим ускорение особой точки Ассура S . Для точки S имеем $\omega_S = \omega_B + \omega_{SB}^n + \omega_{SB}^t$, но $\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^n + \omega_{BA}^t$, тогда

$$\omega_S = \omega_A + \overline{\omega_{SB}^n} + \overline{\omega_{BA}^n} + \overline{\omega_{SB}^t} + \overline{\omega_{BA}^t}. \quad (30)$$

В этом уравнении $\omega_{SB}^n = \omega_{BC}^2 (BS) \parallel \overrightarrow{BS}$, причем $\omega_{BC} = \omega_{BS}$, так как звено $BSCD$ жесткое;

$$\omega_{BA}^n = \omega_{AB}^2 (AB) \parallel \overrightarrow{AB}; \quad \omega_{SB}^t \perp BS$$

или, что то же самое, $\perp AB$; и, наконец, $\omega_{BA}^t \perp AB$, т. е. касательные ускорения имеют одно направление. Следовательно, в уравнении (30) два неизвестных представляются в виде суммы как одно неизвестное. Второе уравнение для определения ω_S составим по аналогии с предыдущим уравнением

$$\omega_S = \omega_E + \overline{\omega_{SD}^n} + \overline{\omega_{DE}^n} + \overline{\omega_{SD}^t} + \overline{\omega_{DE}^t} \quad (31)$$

Здесь $\omega_{SD}^n = \omega_{BC}^2 (SD) \parallel \overrightarrow{SD}$; $\omega_{DE}^n = \omega_{DE}^2 (DE) \parallel \overrightarrow{DE}$; ω_{SD}^t и $\omega_{DE}^t \perp DE$.

Построением уравнений (30) и (31) определяем точку S' в плане ускорений (см. рис. 32).

Далее определяем ускорение точки C из уравнений

$$\omega_C = \omega_S + \omega_{CS}^n + \omega_{CS}^t$$

и

$$\omega_C = \omega_F + \omega_{CF}^n + \omega_{CF}^t,$$

где $\omega_{CS}^n = \omega_{BC}^2 (CS) \parallel \overrightarrow{CS}$; $\omega_{CS}^t \perp CS$; $\omega_{CF}^n = \omega_{CF}^2 (CF) \parallel \overrightarrow{CF}$; $\omega_{CF}^t \perp CF$.

Построение этих уравнений производится уже известным способом (см. группу 2-го класса 1-го вида).

Ускорение точек B и D можно получить путем построения на отрезке $c's'$ фигуры $s'c'd'b'$ или фигуры $SCDB$. Угловые ускорения звеньев определяются обычным путем по относительным тангенциальным ускорениям. В том случае, когда группа 3-го класса содержит не только вращательные, но и поступательные пары, особые точки Ассура определяются так, как показано на рис. 33.

§ 8. Построение кинематических диаграмм

Графическое дифференцирование и интегрирование

Метод кинематических диаграмм применяется при анализе и синтезе механизмов в тех случаях, когда какой-либо закон движения точки или звена механизма задан в виде графической зависимости в функции времени.

Установим основную зависимость метода. Имеем график $s=f(t)$ перемещения точки в функции времени (рис. 34). Точка движется прямолинейно. Масштаб перемещений обозначим через $k_s \left[\frac{\text{М}}{\text{мм}} \right]$, а времени — $k_t \left[\frac{\text{с}}{\text{мм}} \right]$, тогда действительные перемещения и время будут определяться выражениями $s=k_s \bar{s}$ и $t=k_t \bar{t}$, где \bar{s} и \bar{t} — соответственно перемещение и время на графике. Пусть в момент времени t

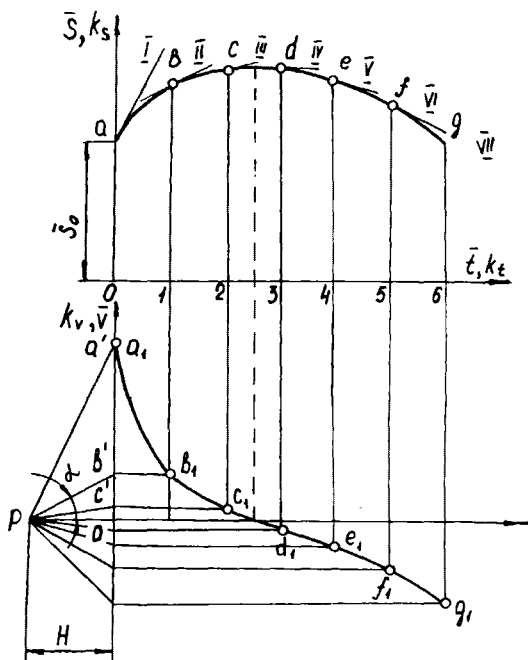


Рис. 35

перемещение точки определяется на графике координатой aa_1 . Через бесконечно малый промежуток $dt=k_t d\bar{t}$ перемещение точки будет определяться координатой $bb_1=aa_1+ds$, т. е. перемещение увеличивается на величину $ds=k_s d\bar{s}$. Скорость перемещающейся точки $v = \frac{ds}{dt} = \frac{k_s ds}{k_t dt}$, но $\frac{ds}{d\bar{s}} = \text{tg } \alpha$, поэтому

$$v = \frac{k_s}{k_t} \text{tg } \alpha. \quad (32)$$

Выражение (32) является зависимостью, на которой основано действие графического дифференцирования.

Имеем график $s=f(t)$ перемещения точки, движущейся прямолинейно (рис. 35). Масштабы времени и перемещения — соответственно k_t и k_s . Время движения точки разделим на ряд равных участков (в рассматриваемом случае 6 участков). На кривой $s=f(t)$

поемим точки $a, b, c \dots$ и проведем к каждой из этих точек касательные прямые I, II, III... Ниже, под графиком $s=f(t)$, построим прямоугольную систему координат с теми же участками времени. Ось абсцисс продолжим влево от оси ординат и на произвольном расстоянии H отложим точку p — полюс построения.

Из точки p проведем прямые, параллельные касательным, до пересечения с осью ординат $pa' \parallel I, pb' \parallel II, p'c \parallel III, \dots$ Полученные точки a', b', c', \dots споем на соответствующие ординаты, получаем точки a_1, b_1, c_1, \dots , которые соединяем плавной кривой.

Установим, что представляет собой полученная кривая. Ее произвольная ордината $1b_1 = ob' = H \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол наклона касательной к первоначальной кривой). Таким образом, ординаты вновь полученной кривой так же, как и скорость v , пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к кривой $s=f(t)$, т. е. одной и той же величине. Следовательно, ординаты вновь полученной

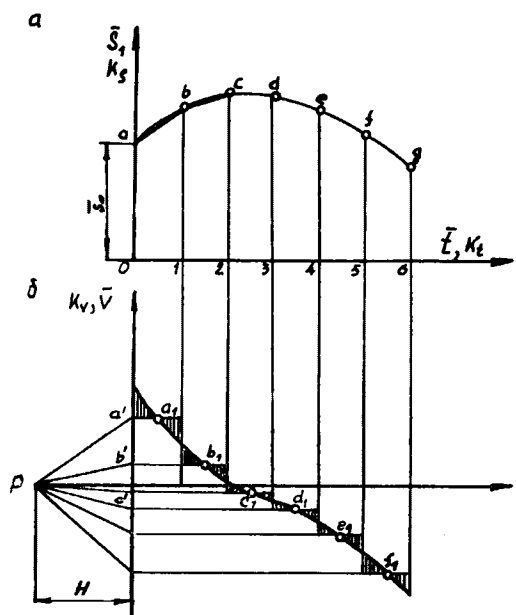


Рис. 36

кривой представляют собой скорость точки, движущейся прямолинейно в масштабе k_v , пока не известно, а проведенное построение есть действие графического дифференцирования. Теперь на оси ординат нижнего графика (см. рис. 35) можно показать v и масштаб k_v . Найдем этот масштаб. Значение скорости

$$v = k_v v = k_v H \operatorname{tg} \alpha \text{ и } v = \frac{k_s}{k_t} \operatorname{tg} \alpha.$$

Приравнявая правые части этих выражений и сокращая на $\operatorname{tg} \alpha$, получим

$$k_v = \frac{k_s}{H k_t}. \quad (33)$$

Обычно пользуются методом графического дифференцирования, не требующим проведения касательных, так как невозможно точно провести касательную к кривой без особых приспособлений. Рассмотрим этот метод. Заданную кривую (рис. 36, а) заменяем графиком в виде ломаной линии, полагая закон изменения перемещения точки на каждом отрезке времени линейным, т. е. скорость на каждом участке постоянной. При дифференцировании кривой $s=f(t)$

в этом случае из точки p (рис. 36, б) проводим прямые $pa' \parallel ab$, $pb' \parallel bc \dots$. В результате получаем ступенчатый график скорости. Через этот график проводим плавную кривую, соединяя точки a_1 , b_1, \dots , которые располагаются в середине каждого участка.

Графическое интегрирование рассматриваем и осуществляем как действие, обратное графическому дифференцированию.

Если точка движется по замкнутой траектории, то для графического дифференцирования ее перемещение рассматривается вдоль двух взаимно перпендикулярных осей.

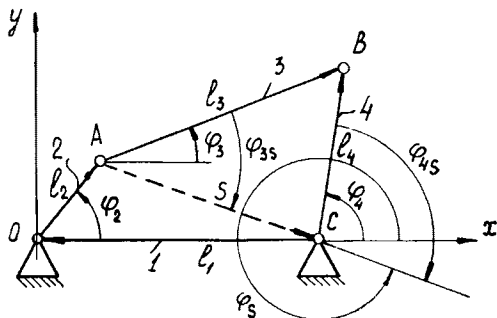


Рис. 37

§ 9. Аналитическая кинематика механизмов

Обычно аналитический метод позволяет получить результат с необходимой степенью точности. Однако аналитическое решение часто приводит к громоздким зависимостям, которыми можно пользоваться только с помощью вычислительных машин.

Шарнирный четырехзвенник

I. Положение звеньев. Дано: длины звеньев l_1, l_2, l_3, l_4 , угол φ_2 . Определить φ_3 и φ_4 (рис. 37).

Рассмотрим замкнутый векторный контур OAC . Здесь S — переменный вектор, определяющий относительное положение точек A и C .

Для контура $OACO$

$$l_2 + S + l_1 = 0. \quad (34)$$

В проекциях на оси координат OX и OY

$$l_2 \cos \varphi_2 + S \cos \varphi_S - l_1 = 0, \quad (35)$$

$$l_2 \sin \varphi_2 + S \sin \varphi_S = 0, \quad (36)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_S = \frac{-l_2 \sin \varphi_2}{-l_2 \cos \varphi_2 + l_1} \quad (37)$$

и

$$S = -l_2 \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_S}. \quad (38)$$

Из $\triangle ABC$ имеем

$$l_3^2 = l_4^2 + S^2 + 2l_4 S \cos \varphi_{4S},$$

$$l_4^2 = l_3^2 + S^2 - 2l_3 S \cos \varphi_{3S}.$$

Тогда

$$\varphi_{4S} = \arccos \frac{l_3^2 - l_4^2 - S^2}{2l_4S}, \quad (39)$$

$$\varphi_{3S} = \arccos \frac{l_3^2 - l_4^2 + S^2}{2l_3S}. \quad (40)$$

Здесь

$$\varphi_{4S} = \varphi_4 - \varphi_S; \quad \varphi_{3S} = \varphi_3 - \varphi_S, \quad (41)$$

$$\varphi_4 = \varphi_{4S} + \varphi_S; \quad \varphi_3 = \varphi_{3S} + \varphi_S, \quad (42)$$

где

$$\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2) \text{ и } \varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2).$$

2. Скорости и ускорения звеньев. Дано ω_2 и ϵ_2 — соответственно угловая скорость и ускорение звена 2. Определить ω_3 , ω_4 , ϵ_3 и ϵ_4 — соответственно угловые скорости и ускорения звеньев 3 и 4.

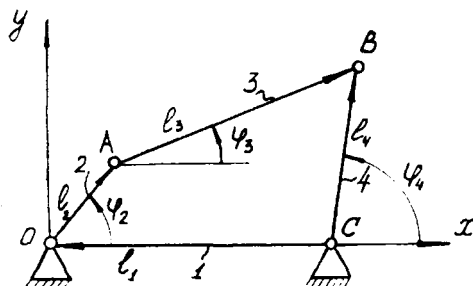


Рис. 38

Векторное уравнение замкнутости контура $OABCO$ (рис. 38) будет: $l_1 + l_2 + l_3 = l_4$. Проектируя это уравнение на ось OX , получим

$$-l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 = l_4 \cos \varphi_4. \quad (43)$$

Продифференцируем уравнение (43) по обобщенной координате φ_2 :

$$-l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = -l_4 \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}. \quad (44)$$

Обозначим $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = u_{32}$ и $\frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = u_{42}$ — аналоги угловых скоростей звеньев 3 и 4. Физический смысл u_{32} и u_{42} понятен из следующего:

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = u_{32} \omega_2, \quad (45)$$

$$\omega_4 = \frac{d\varphi_4}{dt} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = u_{42} \omega_2. \quad (46)$$

Отсюда

$$u_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2}; \quad u_{42} = \frac{\omega_4}{\omega_2}. \quad (47)$$

Следовательно, смысл аналогов угловых скоростей — безразмерные угловые скорости или передаточные отношения.

Выражение (44) запишем в виде

$$l_2 \sin \varphi_2 + u_{32} l_3 \sin \varphi_3 = u_{42} l_4 \sin \varphi_4. \quad (48)$$

Преобразуем систему координат XOY , повернув ее вначале на угол φ_3 , а затем на угол φ_4 , тогда из уравнения (48) получим

$$u_{42} = \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)},$$

$$u_{32} = -\frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \quad (49)$$

Угловые скорости определяем по выражениям (45) и (46).

Аналоги угловых ускорений $u'_{32} = \frac{du_{32}}{d\varphi_2}$ и $u'_{42} = \frac{du_{42}}{d\varphi_2}$ получим после дифференцирования уравнения (48) по координате φ_2 и преобразования координат аналогично предыдущему:

$$u'_{32} = \frac{l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) - u_{42}^2 l_4 + u_{32}^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4)}{-l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)},$$

$$u'_{42} = \frac{l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + u_{32}^2 l_3 - u_{42}^2 l_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}. \quad (50)$$

Угловые ускорения звеньев

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega_2 u_{32}) = \omega_2 \frac{du_{32}}{dt} + u_{32} \frac{d\omega_2}{dt} =$$

$$= \omega_2 \frac{du_{32}}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + u_{32} \varepsilon_2 = \omega_2^2 u'_{32} + \varepsilon_2 u_{32}. \quad (51)$$

Аналогично

$$\varepsilon_4 = \omega_2^2 u'_{42} + \varepsilon_2 u_{42}. \quad (52)$$

Кулисный механизм

Дано φ_2 , ω_2 , ε_2 , l_1 , l_2 . Определить φ_4 , ω_4 , ε_4 , l_4 (рис. 39). Из векторного контура $OABO$ имеем

$$l_1 + l_2 = l_4. \quad (53)$$

Проектируя уравнение (53) на оси координат XOY , получим

$$l_2 \cos \varphi_2 = l_4 \cos \varphi_4,$$

$$l_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_4 \sin \varphi_4. \quad (54)$$

Из отношения этих уравнений находим

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{l_1 + l_2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}. \quad (55)$$

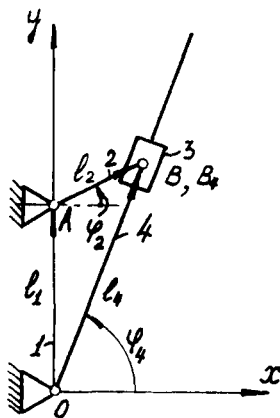


Рис. 39

Из $\triangle OAB$ имеем

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \sin \varphi_2}. \quad (56)$$

Дифференцируя уравнение (54) по обобщенной координате φ_2 , получим

$$\begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 &= -u_{42} l_4 \sin \varphi_4 + (v_{C,C})_{\varphi} \cos \varphi_4, \\ l_2 \cos \varphi_2 &= u_{42} l_4 \cos \varphi_4 + (v_{C,C})_{\varphi} \sin \varphi_4. \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь $u_{42} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}$ — аналог угловой скорости звена 4; $(v_{C,C})_{\varphi} = \frac{dl_4}{d\varphi_2}$ — аналог относительной скорости звена 4 вдоль оси ползуна 3.

После преобразования системы координат из уравнений (57) следует:

$$\begin{aligned} (v_{C,C})_{\varphi} &= -l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4), \\ u_{42} &= \frac{l_2}{l_4} \cos(\varphi_2 - \varphi_4). \end{aligned} \quad (58)$$

Для определения ускорений дифференцируем уравнения (57) по координате φ_2 . После несложных выкладок и преобразования системы координат получим

$$\begin{aligned} (a'_{C,C})_{\varphi} &= u_{42}^2 l_4 - l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4), \\ u'_{42} &= -\frac{(a^k_{C,C})_{\varphi} + l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_4}. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь u'_{42} , $(a^k_{C,C})_{\varphi}$ и $(a'_{C,C})_{\varphi}$ — аналоги углового, корнолисова и релятивного ускорений соответственно:

$$\begin{aligned} v_{C,C} &= \omega_2 (v_{C,C})_{\varphi}; \quad a^k_{C,C} = \omega_2 (a^k_{C,C})_{\varphi}; \\ a'_{C,C} &= \omega_2 (a'_{C,C})_{\varphi}; \quad \varepsilon_4 = \omega_2^2 u'_{42} + \varepsilon_2 u_{42}. \end{aligned} \quad (60)$$

Универсальный шарнир (шарнир Гука, карданная передача)

Универсальный шарнир применяется при передаче вращательного движения между звеньями, оси которых пересекаются (рис. 40), причем угол между осями в процессе движения может меняться. Такой шарнир используется в автомобилях при передаче движения от коробки скоростей к заднему мосту, в прокатных станах, сварочных машинах и ряде машин металлургического производства. Звенья 1 и 2 (см. рис. 40) называются вилками, а звено 3 — крестовиной. Стержни A_0A_0 и B_0B_0 крестовины пересекаются под углом 90° . Пары A_0 и B_0 — вращательные пары 5-го класса.

Найдем соотношения между угловыми скоростями звеньев шарнира. Дано: α — постоянный для данного отрезка времени угол

между осями звеньев 1 и 2; ω_1 — угловая скорость и φ_1 — угол поворота звена 1. Требуется найти угол φ_2 поворота звена 2 и его угловую скорость ω_2 .

Траекториями точек A и B будут окружности в плоскостях, перпендикулярных осям звеньев 1 и 2. Изобразим траекторию точки A в ее плоскости — это будет окружность и проекцию в этой плоскости траектории точки B — это будет эллипс. Дадим звену 1 угловое перемещение φ_1 , тогда точка A займет положение A_1 , а $\angle A_0OA_1 = \varphi_1$. Точка B на проекции ее траектории займет положение B_1 . Угол B_1OA_1 будет прямым углом, так как проекция прямого

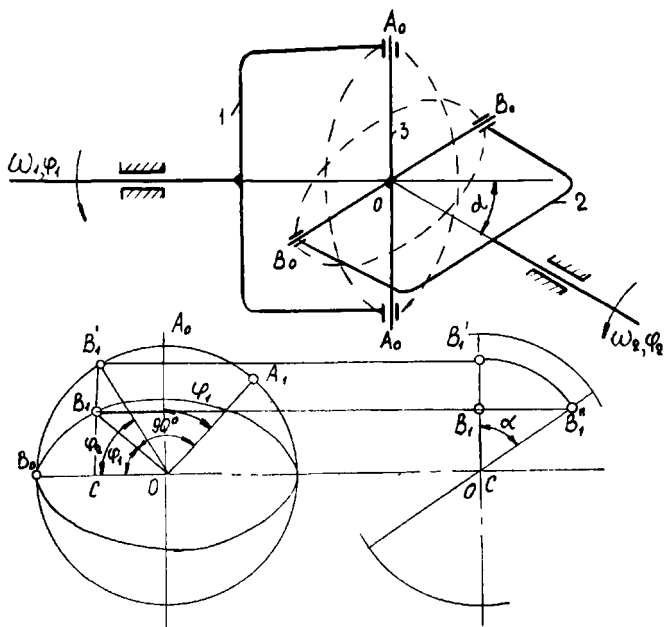


Рис. 40

угла на плоскость, содержащую одну его сторону, также будет прямым углом. Поэтому $\angle B_1OC = \varphi_1$. На своей траектории точка B занимает положение B_1'' , если же плоскость этой траектории совместить с плоскостью траектории точки A , то положение точки будет B_1' , а $\angle B_1'OC = \varphi_2$ — углу поворота звена 2. Из чертежа имеем $B_1'C = (OC) \operatorname{tg} \varphi_2$ и $B_1C = (OC) \operatorname{tg} \varphi_1$, откуда

$$\frac{B_1C}{B_1'C} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}, \text{ но } \frac{B_1C}{B_1'C} = \frac{B_1C}{B_1''C} = \cos \alpha \text{ (см. рис. 40),}$$

тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \alpha}. \quad (61)$$

Отсюда видно, что углы φ_1 и φ_2 не будут одинаковы. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \cos \alpha \frac{1}{\cos^2 \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt},$$

но

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \text{ и } \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2,$$

поэтому

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \cos \alpha \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2}.$$

Выразим $\cos \varphi_2$ через φ_1 . Известно, что

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}.$$

Подставляя значение $\operatorname{tg}^2 \varphi_2$, по выражению (61) получим

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi_1},$$

подставляя в отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1}{\cos \alpha},$$

после несложных преобразований будем иметь

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1}{\cos \alpha}. \quad (62)$$

Из этого выражения видно, что отношение угловых скоростей зависит от угла φ_1 , который непрерывно меняется, поэтому при постоянной угловой скорости ω_1 угловая скорость ω_2 будет непрерывно меняться. Это определяет наличие углового ускорения ведомого звена 2, а следовательно, и дополнительные динамические крутящие моменты, передаваемые на звенья механизма и привод.

В машинах очень часто используется двойной универсальный шарнир, называемый карданной передачей. В этом случае такая передача может быть выполнена по схеме, изображенной на рис. 41, а, когда промежуточное звено 2' имеет вилки, располагающиеся в одной плоскости, или по схеме рис. 41, б, когда вилки промежуточного звена 2' располагаются во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Для схемы рис. 41, а имеем $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_2'$ и $\operatorname{tg} \varphi_2 = \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2'$. Разделив эти равенства друг на друга, получим $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \operatorname{tg} \varphi_2$ при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$.

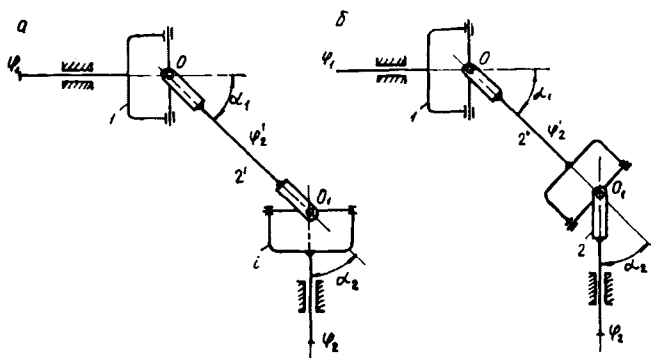


Рис. 41

Для схемы рис. 41, б следует $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_2'$ и $\operatorname{tg} \varphi_2' = \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2$. Из этих равенств имеем: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi_2$.

Таким образом, первая схема механизма позволяет при $\alpha_1 = \alpha_2$ исключить непостоянство угловой скорости ω_2 ведомого звена, а следовательно, и дополнительные динамические крутящие моменты.

Глава III. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 10. Условие существования кривошипа в четырехзвенном механизме

Создаваемый четырехзвенный механизм должен иметь звено, которое, входя во вращательную пару со стойкой, совершало бы полный оборот, т. е. было бы кривошипом. Установим условие существования такого звена. Эта задача иначе называется задачей Грасгофа или условием проворачиваемости звена.

Четырехзвенный механизм в общем случае имеет различные длины звеньев $a < b < c < d$. Изобразим этот механизм в двух край-

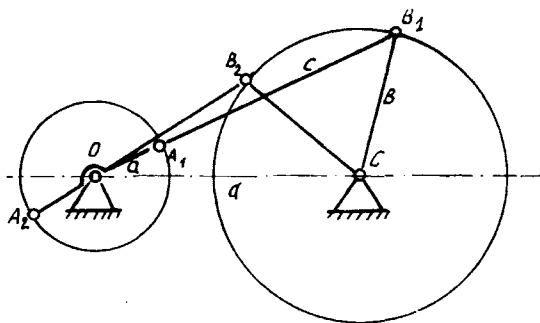


Рис. 42

них положениях (рис. 42). Если механизм может занимать эти два положения, то при вращении звена a он займет и любое промежуточное положение. Следовательно, звено a в этом случае сделает полный оборот и будет кривошипом. Таким образом, существование кривошипа определяется $\triangle OB_1C$ и $\triangle OB_2C$.

Из $\triangle OB_1C$ имеем $OB_1 < B_1C + OC$ или $a + c < b + d$. Из $\triangle OB_2C$ имеем $OB_2 > OC - B_2C$ или $c - a > d - b$, откуда $a + d < b + c$. В первом неравенстве сумма величин $(a + c)$ всегда меньше, чем $(b + d)$, так как $a < b$, а $c < d$. Поэтому оно не служит критерием, определяющим существование кривошипа. Таким образом, только второе неравенство является условием существования кривошипа в четырехзвенном механизме (условие Грасгофа). Следовательно, в четырехзвенном механизме будет кривошип, если сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше суммы двух других звеньев.

В схеме механизма (см. рис. 42) против наименьшего звена a располагалось второе по величине звено b . Возможны всего три схемы (рис. 43). Для всех этих схем условие существования кривошипа будет одним и тем же, что не сложно проверить.

В рассматриваемых схемах кривошипом является звено a , но не только оно может быть кривошипом. Если всему механизму дать обратное движение с угловой скоростью, равной угловой скорости

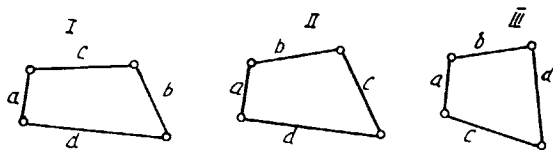


Рис. 43

звена a , но противоположно направленной, то это звено остановится и будет стойкой, а стойка будет кривошипом.

§ 11. Синтез четырехзвенного механизма по заданным условиям

Требуется построить четырехзвенный механизм по заданным условиям.

Графический синтез

1. Дано: три положения кривошипа и три положения коромысла (рис. 44). Так как в общем случае $A_1C_1 \neq A_2C_2 \neq A_3C_3$, то решение следует искать в виде схемы, изображенной на рис. 45. Таким образом, задача сводится к отысканию положения пары B на звене CD . Для этого всему механизму даем обратное движение с угловой скоростью, равной угловой скорости звена CD , но направленной в обратную сторону (рис. 46). Тогда звено CD останавливается, а весь механизм

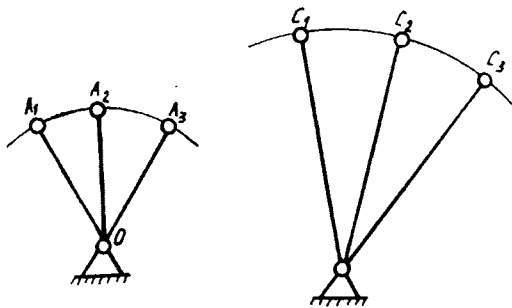


Рис. 44

перемещается относительно него. В этом случае звено AB вращается вокруг точки B , а точка A перемещается по дуге окружности с центром в точке B . Рассмотрим движение точки A в обратном движении относительно первого положения звена CD . Положение точки A_2 относительно звена CD определяется $\triangle A_2C_2D$. Если же C_2D совместится с C_1D , то новым положением точки A_2 будет положение A'_2 , которое находим путем построения $\triangle A'_2C_1D$, равного $\triangle A_2C_2D$.

Аналогично находим положение точки A'_3 путем построения $\triangle A'_3C_1D = \triangle A_3C_3D$. Теперь известно положение A_1, A'_2, A'_3 — точки A при ее движении по дуге окружности с центром в точке B , которую

находим как результат пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков — хорд A_1A_2' и $A_2'A_3'$.

2. Дано: коэффициент изменения скорости хода и два крайних положения коромысла. Прежде чем приступить к построению механизма по заданным условиям, введем понятие коэффициента изменения скорости хода.

Изобразим четырехзвенный механизм в двух его крайних положениях (рис. 47). Угловая скорость звена $OA \omega_{OA} = \text{const}$. При переходе звена из положения 1 в положение 2 оно повернется на угол φ_1 , а при переходе из положения 2 в положение 1 — на угол φ_2 .

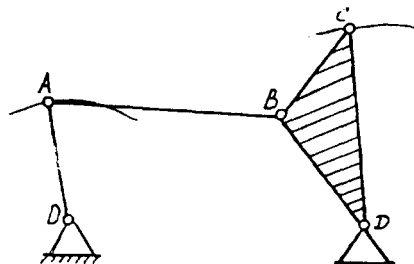


Рис. 45

Из чертежа имеем $\varphi_1 = 180^\circ - \theta$ и $\varphi_2 = 180^\circ + \theta$. Таким образом, время t_{1-2} , затрачиваемое на перемещение из положения 1 в 2, меньше времени t_{2-1} , затрачиваемого на перемещение из положения 2 в 1. Звено BC при переходе из положения 1 в положение 2 и обратно поворачивается на один и тот же угол, поэтому точка B при ходе вперед и назад будет иметь различные средние скорости v_{1-2} и v_{2-1} , причем $v_{1-2} > v_{2-1}$.

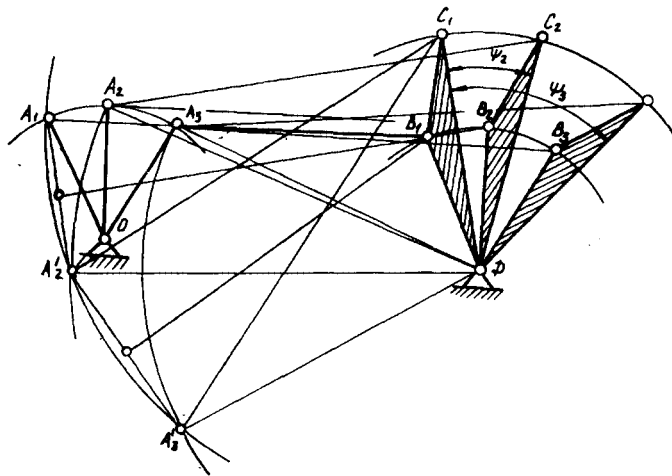


Рис. 46

Назовем коэффициентом изменения скорости хода величину $k = \frac{v_{1-2}}{v_{2-1}}$, где $k > 1$, но так как $\frac{v_{1-2}}{v_{2-1}} = \frac{t_{2-1}}{t_{1-2}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, то $k = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}$. Переходим к построению механизма по заданным условиям. По заданному k находим угол $\theta = 180^\circ \frac{k-1}{k+1}$.

Изобразим два крайних положения звена BC (рис. 48). Точки B_1 и B_2 соединим прямой. При точке B_2 построим угол 90° , при точке B_1 угол $90^\circ - \theta$, тогда угол с вершиной в точке O' будет равен θ .

Вокруг $\triangle O'B_1B_2$ опишем окружность. Угол с вершиной в точке O' — вписанный угол, опирающийся на дугу B_1B_2 , следовательно, все вписанные углы, опирающиеся на эту дугу, будут равны θ . Поэтому в произвольной точке описанной окружности выбираем точку O и строим угол θ . В результате получим два крайних положения четырехзвенного механизма, кривошип которого вращается вокруг точки O . Из чертежа имеем $OB_1 = r + l$ и $OB_2 = l - r$, где r — длина кривошипа и l — длина шатуна.

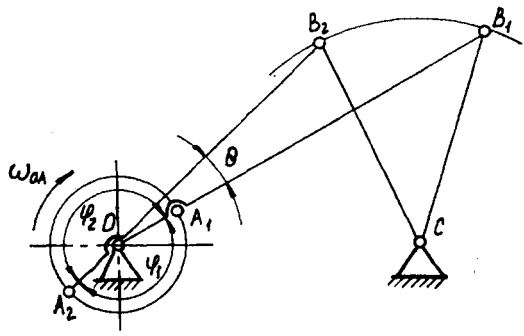


Рис. 47

Следовательно, $r = \frac{OB_1 - OB_2}{2}$. Возможность произвольного выбора положения точки O определяет

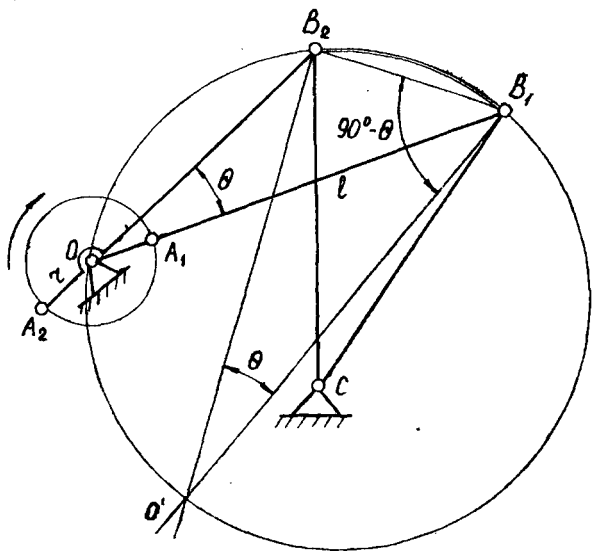


Рис. 48

многочленное решение задачи. Это позволяет использовать какое-либо дополнительное условие (например, габариты механизма). Производится проверка по условиям Грасгофа.

Установим, как осуществляется синтез кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода и двум крайним

положениям точки B кулисы BC . Рассмотрим кулисный механизм в двух крайних положениях (рис. 49). Здесь угол между положением кривошипа OA_1 и продолжением кривошипа в положении OA_2 равен θ . Углы B_1CB_2 и θ будут равны между собой как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

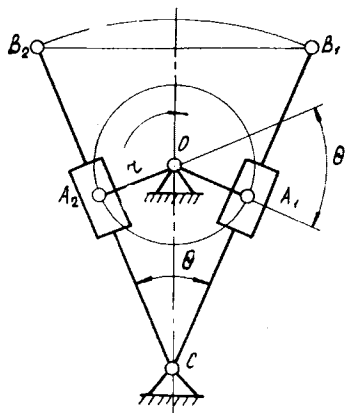


Рис. 49

Рис. 49

Построение кулисного механизма по заданным условиям происходит следующим образом. Точки B_1 и B_2 , положение которых задано, соединим прямой. На прямой B_1B_2 строим равнобедренный треугольник с углом при вершине C , равным углу θ . На прямой, делящей угол θ пополам в произвольной точке, выбираем точку O , вокруг которой вращается кривошип OA . Длину кривошипа OA определим, опустив на прямую B_1C (или B_2C) перпендикуляр. Полученный кулисный механизм будет удовлетворять заданным условиям.

Аналитический синтез

1. Дано $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ (рис. 50). Определить длины звеньев l_0, l_1, l_2 и l_3 .

Обозначим:

$$\frac{l_2}{l_1} = a, \quad \frac{l_3}{l_1} = b; \quad \frac{l_0}{l_1} = c. \quad (63)$$

Уравнения замкнутости контура $OABCO$ в проекциях на оси координат XOY для i -го положения механизма будут

$$\begin{aligned} \cos \varphi_i + a \cos \delta_i &= c + b \cos \psi_i; \\ \sin \varphi_i + a \sin \delta_i &= b \sin \psi_i. \end{aligned} \quad (64)$$

Исключая из этих уравнений δ_i , получим

$$\begin{aligned} \cos \varphi_i &= b \cos \psi_i + \\ + P_1 \cos(\psi_i - \varphi_i) + P_2, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$P_1 = -\frac{b}{c} \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{c^2 + b^2 + 1 - a^2}{2c}. \quad (66)$$

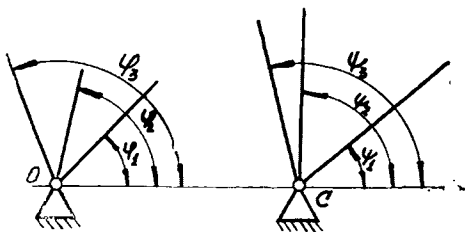


Рис. 50

Подставляя в выражение (65) значения φ и ψ (от 1 до 3), получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= b \cos \psi_1 + P_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) + P_2; \\ \cos \varphi_2 &= b \cos \psi_2 + P_1 \cos(\psi_2 - \varphi_2) + P_2; \\ \cos \varphi_3 &= b \cos \psi_3 + P_1 \cos(\psi_3 - \varphi_3) + P_2. \end{aligned} \quad (67)$$

Из этой системы уравнений определяем b, P_1, P_2 , а затем из выражений (66) последовательно находим величины c и a . Для принятого значения длины кривошипа l_1 (рис. 51) определяем длины звеньев l_2, l_3 и l_0 . Эту задачу удобно решать на ЭВМ.

В том случае, когда механизм должен воспроизвести закон движения, $\psi = \psi(\varphi)$, заданный в виде графической зависимости (рис. 52), то решение дается приближенным, так как только три положения определяют механизм и только в этом случае возможно точное решение.

Система уравнений, из которой определяются параметры механизма, будет

$$b \cos \psi_i + P_1 \cos (\psi_i - \varphi_i) + P_2 - \cos \varphi_i = \Delta_i, \quad (68)$$

где $i = 1, \dots, k$, Δ_i — величина, характеризующая отклонения воспроизводимой функции от заданной.

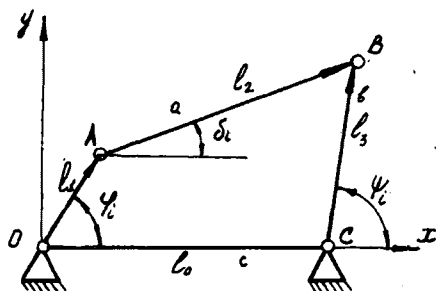


Рис. 51

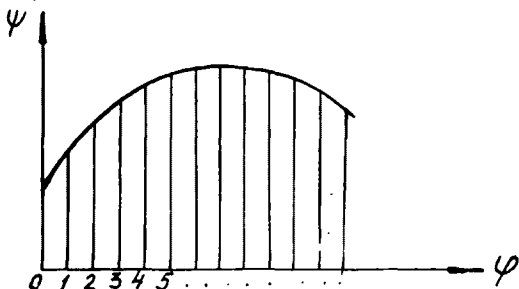


Рис. 52

Значения параметров механизма определяются при минимальной сумме квадратов отклонения:

$$S = \sum_1^k \Delta_i^2.$$

В этом случае частные производные этой функции по каждому параметру будут равны нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial P_1} = \sum_1^k 2\Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial P_1} = \sum_1^k \Delta_i \cos (\psi_i - \varphi_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial P_2} = \sum_1^k 2\Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial P_2} = \sum_1^k \Delta_i = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_1^k 2\Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial b} = \sum_1^k \Delta_i \cos \psi_i = 0. \end{array} \right. \quad (69)$$

Подставляя в уравнения (69) значения Δ_i по выражению (68), получим систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b \sum_1^k \cos \psi_i \cos (\psi_i - \varphi_i) + P_1 \sum_1^k \cos^2 (\psi_i - \varphi_i) + \\ \quad + P_2 \sum_1^k \cos (\psi_i - \varphi_i) - \sum_1^k \cos \varphi_i \cos (\psi_i - \varphi_i) = 0; \\ b \sum_1^k \cos \psi_i + P_1 \sum_1^k \cos (\psi_i - \varphi_i) + k P_2 - \sum_1^k \cos \varphi_i = 0; \\ b \sum_1^k \cos^2 \psi_i + P_1 \sum_1^k \cos \psi_i \cos (\psi_i - \varphi_i) + \\ \quad + P_2 \sum_1^k \cos \psi_i - \sum_1^k \cos \psi_i \cos \varphi_i = 0. \end{array} \right. \quad (70)$$

Отсюда определяем b , P_1 , P_2 и далее a и c . Решение данной задачи целесообразно проводить на ЭВМ.

Глава IV. Зубчатые механизмы

Звенья, входящие в пары 4-го класса, могут иметь профили различных очертаний. Передача движения между звеньями в таких случаях будет осуществляться либо при качении со скольжением, либо при чистом качении одной кривой (поверхности) по другой.

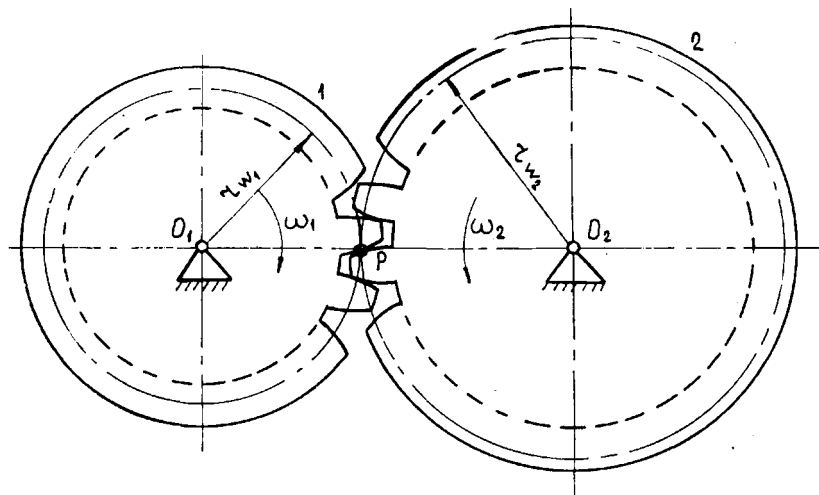


Рис. 53

Кривые, передающие движение при наличии качения со скольжением, называются взаимноогibaемыми, а кривые, передающие движение только при качении, — центроидами относительного движения (поверхности — аксоидами относительного движения).

Отсутствие скольжения в центроидных механизмах и явлений, его сопровождающих, на первый взгляд делает такие механизмы более предпочтительными сравнительно с механизмами, в которых используются взаимноогibaемые кривые. Однако на практике центроидные механизмы используются крайне редко. Это связано с тем, что центроиды относительного движения имеют, во-первых, сложные очертания даже при осуществлении сравнительно простого закона движения, во-вторых, — неблагоприятные соотношения усилий, действующих на звенья и пары центроидного механизма.

Взаимноогibaемые кривые, как будет показано ниже, могут иметь простые формы, которые несложно осуществить практически.

Наиболее простыми центроидными механизмами являются фрикционные механизмы с центроидами относительного движения — окружностями. Большое распространение в машиностроении получили основанные на передаче движения посредством взаимнооггибаемых кривых зубчатые механизмы.

Образование простейшего зубчатого механизма (рис. 53) можно представить следующим образом. Если взять центроидную передачу

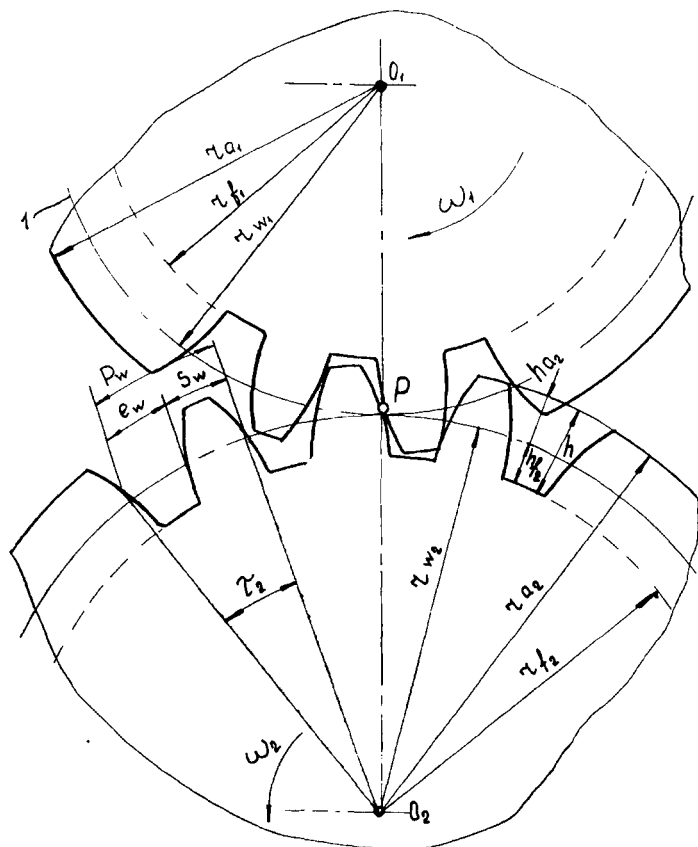


Рис. 54

с центроидами 1 и 2 и расположить на них последовательно чередующиеся выступы-зубья и впадины, то передача движения будет осуществляться при помощи боковых профилей зубьев. Эти профили представляют собой взаимнооггибаемые кривые.

Центroidы же относительного движения 1 и 2 с радиусами r_{w_1} и r_{w_2} называются начальными окружностями. Точка P — мгновенный центр относительного движения (вращения), принадлежащая неподвижной плоскости, называется полюсом зацепления. Если точка P располагается между осями вращения колес O_1 и O_2 (см. рис. 53),

то зубчатая передача будет с внешним зацеплением. Если же точка P располагается по одну сторону осей колес O_1 и O_2 , то это зубчатая передача с внутренним зацеплением.

В том случае, когда одна из начальных окружностей имеет радиус бесконечно большой, т. е. начальная окружность вырождается в начальную прямую, зацепление будет реечное, и вращательное движение зубчатого колеса преобразуется в поступательное движение зубчатой рейки.

§ 12. Основные параметры зубчатого зацепления

Часть зуба, выступающая за начальную окружность (рис. 54), называется начальной головкой зуба, а часть, располагающаяся до начальной окружности, — начальной ножкой зуба. Окружность, ограничивающая головки зубьев, называется окружностью вершин, а окружность, ограничивающая впадины зубьев, — окружностью впадин.

Расстояние между одноименными профилями соседних зубьев, измеренное по дуге окружности, называется шагом зацепления. Шаг может быть измерен по окружности произвольного радиуса. Центральный угол зубчатого колеса, равный $\frac{2\pi}{z}$, называется угловым шагом зубьев. Длина дуги окружности, которую занимает зуб, это толщина зуба, длина дуги окружности, занимаемая впадиной, — ширина впадины. Введем обозначения: r_{w_1} и r_{w_2} — радиусы начальных окружностей; h_a и h_f — соответственно высота делительной головки и высота ножки зуба; r_{a_1} и r_{a_2} — радиусы окружностей вершин; r_{f_1} и r_{f_2} — радиусы окружностей впадин; s_w и e_w — соответственно толщина зуба и ширина впадины по начальной окружности; p_w — начальный окружной шаг зубьев; τ_1 и τ_2 — угловой шаг зубьев; z_1 и z_2 — числа зубьев зубчатых колес.

Из принятых определений следует $s_w + e_w = p_w$. Шаг по начальным окружностям обоих зубчатых колес одинаков. Для начальных окружностей толщина зуба колеса 1 равна ширине впадины колеса 2, а толщина зуба колеса 2 равна ширине впадины колеса 1 при отсутствии бокового зазора в зацеплении.

Для зубчатых колес $2\pi r_{w_1} = z_1 p_w$ и $2\pi r_{w_2} = z_2 p_w$. Из этих равенств получим $\frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{z_2}{z_1}$. С учетом уже известного выражения для передаточного отношения

$$u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Длина дуги произвольной окружности с радиусом r_{1k} равна $2\pi r_{1k} = z_1 p_{1k}$, откуда $2r_{1k} = z_1 \frac{p_{1k}}{\pi}$. Обозначим $\frac{p_{1k}}{\pi}$ символом m_{1k} и

назовем эту величину модулем зацепления. Следовательно, у зубчатого колеса может быть бесчисленное множество модулей. Обычно все параметры зубчатых колес и зацепления принято выражать через модуль, который соответствует ГОСТу. Такой модуль зубчатых колес, находящихся в зацеплении, будет только один. Окружности зубчатых

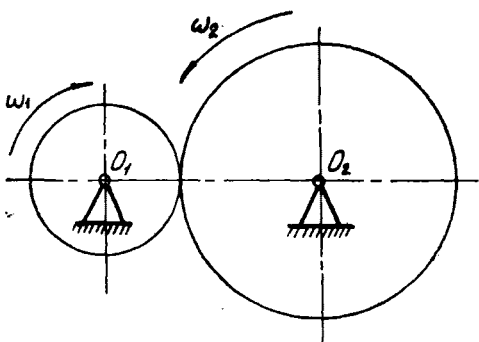


Рис. 55

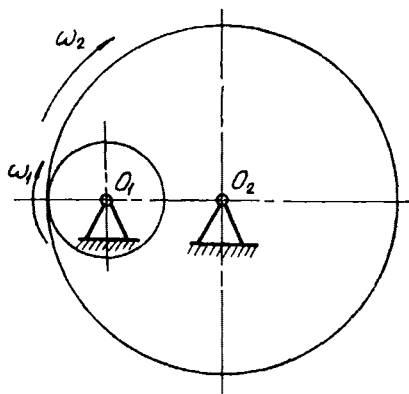


Рис. 56

колес, у которых модуль соответствует ГОСТу, называются делительными окружностями. Радиусы этих окружностей

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{mz_2}{2},$$

где m — модуль зацепления, соответствующий ГОСТу.

Взяв отношение радиусов делительных окружностей, получим

$$u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \omega_2}{r_1 \omega_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (71)$$

При определении передаточного отношения зубчатых механизмов обычно учитывается его знак, который показывает, в какую сторону вращается ведомое зубчатое колесо по отношению к ведущему. Если ведомое и ведущее колёса вращаются в одну сторону, то знак передаточного отношения принимается положительным, если в разные — отрицательным. Следовательно, для внешнего зубчатого зацепления (рис. 55) $u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}$, а для внутреннего (рис. 56) $u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$.

§ 13. Зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес

Зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес, называются редукторами. Определим передаточное отношение одного такого механизма.

Общее передаточное отношение механизма (рис. 57).
 Запишем передаточные отношения отдельных зубчатых пар, составляющих весь механизм:

$$u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_{II I}} = - \frac{z_2}{z_1}; \quad u_{3-4} = \frac{\omega_{II I}}{\omega_{III}} = - \frac{z_4}{z_3}; \quad u_{5-6} = \frac{\omega_{III}}{\omega_{IV}} = - \frac{z_6}{z_5}.$$

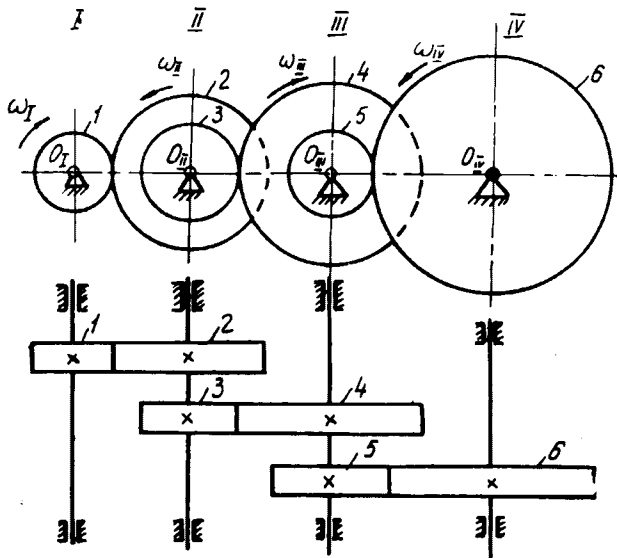


Рис. 57

Возьмем произведение этих передаточных отношений:

$$u_{1-2} u_{3-4} u_{5-6} = \frac{\omega_1 \omega_{II I} \omega_{III}}{\omega_{II} \omega_{III} \omega_{IV}} = \frac{\omega_1}{\omega_{IV}},$$

но $\frac{\omega_1}{\omega_{IV}} = u_{1-6}$. Следовательно,

$$u_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_{IV}} = \left(- \frac{z_2}{z_1}\right) \left(- \frac{z_4}{z_3}\right) \left(- \frac{z_6}{z_5}\right), \quad (72)$$

т. е. передаточное отношение механизма, состоящего из нескольких пар зубчатых колес, равно произведению передаточных чисел отдельных зубчатых пар, составляющих механизм.

Если механизм состоит из нескольких конических зубчатых колес, то на знак передаточного отношения в таких механизмах оказывает влияние и взаимное расположение зубчатых колес. На рис. 58 видно, что изменение положения колеса 3 приводит к изменению знака передаточного отношения. Действительно, для механизма, изображенного на рис. 58, а

$$u_{1-4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3},$$

а на рис. 58, б

$$u_{1-4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = - \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_3},$$

так как в первом случае колеса 1 и 4 вращаются в одну сторону, а во втором — в противоположные.

Для определения знака передаточного отношения таких механизмов используют кинематическую схему. На зубчатом колесе 1 около линии контакта колес (см. рис. 58, а) наносят стрелку — вектор окружной скорости одной из точек начального конуса колеса. Если

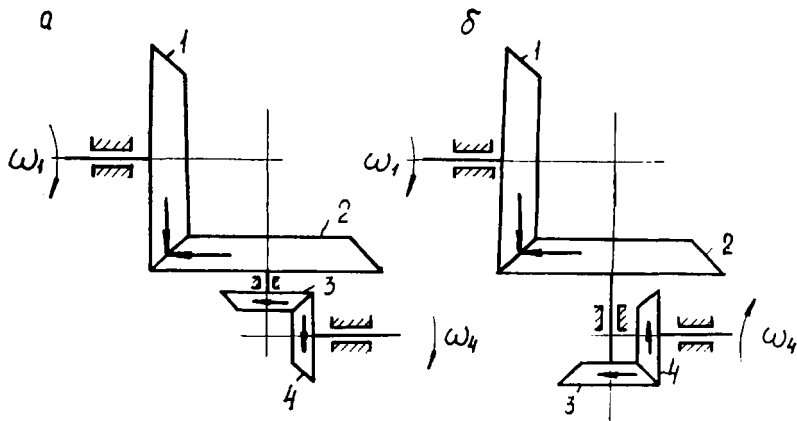


Рис. 58

эту стрелку направить к линии контакта колес, то стрелка на колесе 2 также будет направлена к линии контакта колес. Так как колеса 2 и 3 жестко связаны между собой, они вращаются в одну сторону, и стрелка на колесе 3 направлена в ту же сторону, что и на колесе 2. Стрелка на колесе 3 направлена от линии контакта колес 3 и 4, поэтому и на колесе 4 стрелка направляется также от линии контакта. Знак общего передаточного отношения для механизма, изображенного на рис. 58, а, положительный, так как стрелки на колесах 1 и 4 имеют одинаковое направление, а для механизма, изображенного на рис. 58, б, отрицательный, так как стрелки на этих колесах направлены в противоположные стороны.

Этим методом можно пользоваться также и при определении знака передаточного отношения в случаях, когда механизм состоит только из цилиндрических колес или цилиндрических и конических.

§ 14. Дифференциальные и планетарные зубчатые механизмы

К дифференциальным и планетарным зубчатым механизмам относятся такие механизмы, у которых имеются зубчатые колеса с подвижными осями (рис. 59). Если число степеней подвижности таких механизмов равно единице, то они называются планетарными, если двум и более — дифференциальными.

Число степеней подвижности механизма, приведенного на рис. 59, находим по формуле П. Л. Чебышева $W = 3n - 2p_3 - p_4$. Здесь $n = 3$, $p_3 = 3$, $p_4 = 1$; $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$.

Следовательно, механизм будет дифференциальным. В данном механизме два независимых закона движения, т. е. двум звеньям (например, 1 и 3) можно задать произвольные законы движения, тогда звено 2 будет двигаться по определенному закону.

Зубчатое колесо 1, ось которого неподвижна, называется центральным колесом, колесо 2, имеющее подвижную ось, — сателлитом, а звено 3, несущее зубчатое колесо с подвижной осью, — водилом. Передаточное отношение в таких механизмах можно определить, используя метод обращенного движения. Для этого дифференциальному механизму (см. рис. 59) мысленно придаем дополнительную угловую скорость, равную угловой скорости водила, но направленную в противоположную сторону. Это не изменит относительного движения звеньев, абсолютные же скорости будут другими:

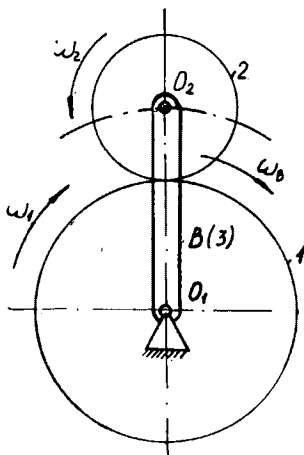


Рис. 59

Звено	1	2	3
Скорость звена	ω_1	ω_2	ω_B
Скорость при обратном движении	$\omega_1 - \omega_B$	$\omega_2 - \omega_B$	$\omega_B - \omega_B = 0$

Угловая скорость водила будет равна нулю, и в механизме уже не будет зубчатых колес с подвижными осями, т. е. механизм из дифференциального превращается в обычный, для которого справедливо отношение:

$$u_{12}^{(B)} = \frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_2 - \omega_B} = - \frac{z_2}{z_1}. \quad (73)$$

Для планетарного механизма $\omega_1 = 0$, следовательно,

$$u_{12}^{(B)} = \frac{0 - \omega_B}{\omega_2 - \omega_B} = - \frac{z_2}{z_1},$$

откуда

$$u_{2-B} = \frac{\omega_2}{\omega_B} = 1 + \frac{z_1}{z_2}. \quad (74)$$

Для дифференциального механизма, состоящего из n зубчатых колес,

$$u_{1n}^{(B)} = \frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_n - \omega_B} = \left(- \frac{z_2}{z_1}\right) \left(- \frac{z_4}{z_3}\right) \dots \left(- \frac{z_n}{z_{n-1}}\right). \quad (75)$$

Из этих выражений находим неизвестное передаточное отношение и угловую скорость звена механизма.

Углы поворота звеньев в дифференциальном механизме (см. рис. 59) определяются уравнением $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_2, \varphi_B)$. Дифференцируя это уравнение по времени, получим

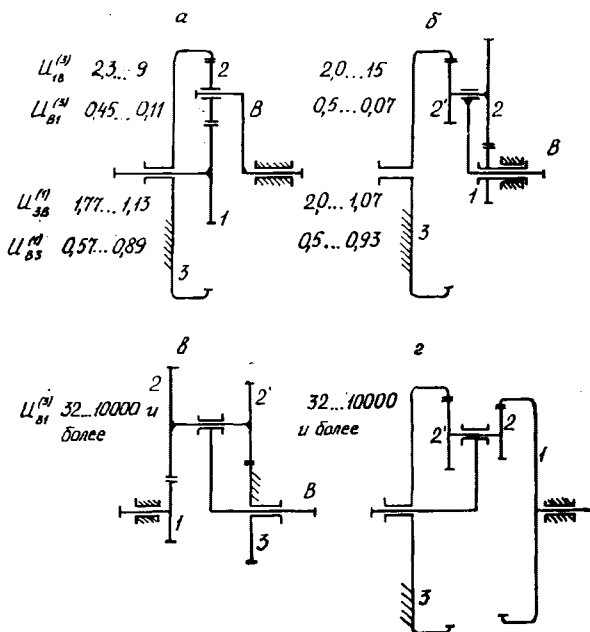


Рис. 60

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_B} \frac{d\varphi_B}{dt}.$$

Здесь

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \quad \frac{d\varphi_B}{dt} = \omega_B; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} = u_{12}^{(B)}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_B} = u_{1B}^{(2)}.$$

Тогда

$$\omega_1 = u_{12}^{(B)}\omega_2 + u_{1B}^{(2)}\omega_B. \quad (76)$$

Из уравнения (73) имеем

$$\omega_1 - \omega_B = u_{12}^{(B)}\omega_2 - u_{12}^{(B)}\omega_B. \quad (77)$$

Подставляя в уравнение (77) значение ω_1 , по выражению (76) получим

$$u_{1B}^{(2)} + u_{12}^{(B)} = 1. \quad (78)$$

В элементарном дифференциальном механизме сумма коэффициентов при угловых скоростях ведущих звеньев равна единице.

Рассмотрим возможные схемы четырехзвенных планетарных эпициклических зубчатых механизмов (рис. 60). На рисунке показаны

рекомендуемые передаточные отношения, которые можно осуществить различными передачами. Для силовых передач рекомендуются схемы *a* и *b*, так как они имеют высокий КПД, примерно равный 0,96. Для воспроизведения такими передачами больших передаточных отношений используется несколько последовательно соединенных механизмов.

Замкнутые дифференциальные механизмы. Простой дифференциальный механизм (рис. 61, звенья 3', 4, 1', B), имеющий две степени подвижности, путем присоединения к двум его звеньям обычного зубчатого механизма (звенья 1, 2, 2', 3) превращают в механизм с одной степенью подвижности, называемый дифференциальным зубчатым механизмом.

Для определения передаточного отношения u_{1B} разделяем механизм на два отдельных механизма — один механизм обычный, другой — дифференциальный (см. рис. 61). Тогда

$$u_{1B} = u_{13} \cdot u_{3'B}, \quad (79)$$

имеем

$$u_{1'3'}^{(B)} = \frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_3' - \omega_B} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_3'} - \frac{\omega_B}{\omega_3'}}{1 - \frac{\omega_B}{\omega_3'}} = \frac{u_{13} - u_{B3'}}{1 - u_{B3'}}. \quad (80)$$

Отсюда получим

$$u_{3'B} = \frac{1}{u_{B3'}} = \frac{u_{1'3'}^{(B)} - 1}{u_{1'3'}^{(B)} - u_{13}} \quad \text{и} \quad u_{1B} = \frac{u_{13} (u_{1'3'}^{(B)} - 1)}{u_{1'3'}^{(B)} - u_{13}}. \quad (81)$$

Здесь u_{13} и $u_{1'3'}^{(B)}$ определяются по известным числам зубчатых колес механизма.

Условия синтеза дифференциальных и планетарных механизмов. При назначении чисел зубьев колес создаваемых дифференциальных и планетарных механизмов следует соблюдать определенные условия. Установим эти условия.

Для дифференциального зубчатого механизма (рис. 62) $r_{\omega_3} = r_{\omega_1} + 2r_{\omega_2}$. Полагая, что начальные и делительные окружности совпадают, получим $\frac{mz_3}{2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{2mz_2}{2}$, откуда $z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}$. Это условие носит название условия соосности. Из него следует, что числа зубьев центральных колес 1 и 3 должны быть либо оба четные, либо оба нечетные. Только в этом случае z_2 будет целым числом.

При сборке дифференциального зубчатого механизма, имеющего несколько сателлитов, зубья этих сателлитов должны полностью

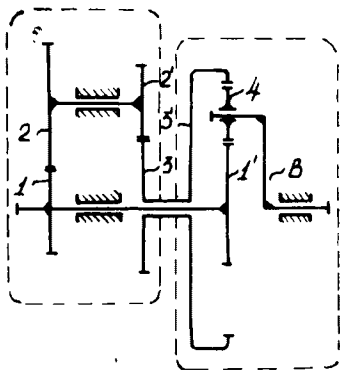


Рис. 61

совпадать со впадинами центральных колес 1 и 3 (см. рис. 62). Найдём условие, при котором это будет соблюдаться. Это условие носит название условия сборки. Одно из зубчатых колес сателлитов (колесо 2₁) полагаем введенным в зацепление, начальные окружности контактируют в точках *a* и *b*. По начальным окружностям колес 1 и 3 от точек *a* и *b* отложим шаг зацепления в направлении

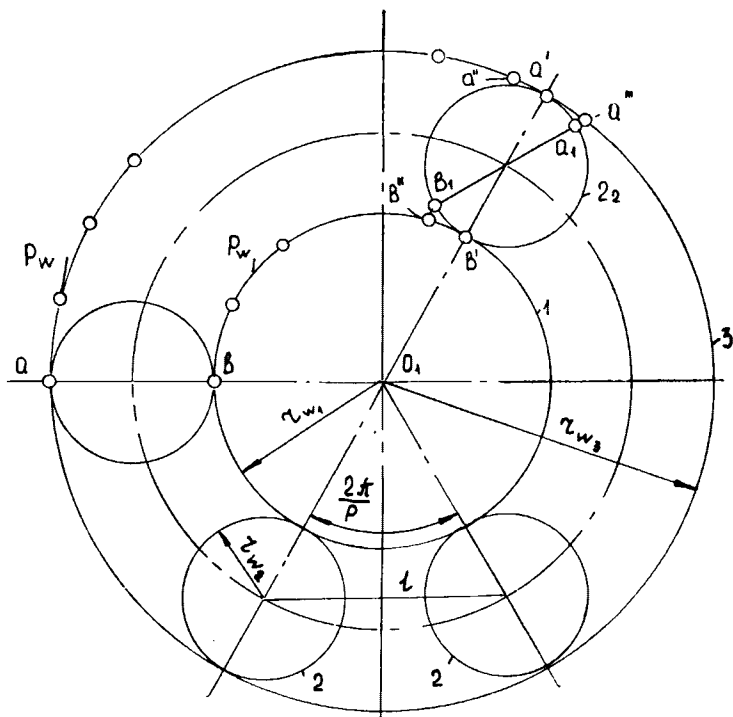


Рис. 62

колеса 2₂. В общем случае шаг на $\overline{aa'}$ и $\overline{bb'}$ не уложится целое число раз. Поэтому $\overline{a'a''} < p_w$ и $\overline{b'b''} < p_w$. От точки *a'* отложим дуги $\overline{a'a''} = p_w - \overline{a'a'}$ и $\overline{a'a_1} = p_w - \overline{a'a'}$ и проведем диаметр *a₁b₁*. При перекачивании начальных окружностей в процессе зацепления колес точка *a₁* попадает в точку *a'*. Зубчатое колесо 2₂ можно ввести в зацепление, если оно после этого окажется в тех же самых условиях зацепления, что и колесо 2₁. Для этого необходимо, чтобы точка *b₁* попала в точку *b'*, т. е. чтобы $\overline{b_1b'} = \overline{b'b'}$. Из чертежа следует, что $\overline{a'a_1} = \overline{b'b_1}$. Следовательно, $p_w - \overline{a'a''} = \overline{b'b''}$ или $\overline{a'a''} + \overline{b'b''} = p_w$.

Обозначим через *p* число сателлитов, тогда

$$\overline{aa'} = \frac{z_3 p_w}{p} = k_1 p_w + \overline{a'a''} \quad \text{и} \quad \overline{bb'} = \frac{z_1 p_w}{p} = k_2 p_w + \overline{b'b''},$$

где *k₁* и *k₂* — целые числа.

Суммируя, получим

$$\frac{z_2 p_w}{p} + \frac{z_1 p_w}{p} = (k_1 + k_2) p_w + \overline{a'a''} + \overline{b'b''} = (k_1 + k_2) p_w + p_w = k p_w,$$

где k — целое число.

Следовательно, $\frac{z_1 + z_2}{p} = k$, т. е. сумма чисел зубьев центральных колес должна быть кратна числу сателлитов.

Следующим условием синтеза планетарных и дифференциальных передач является условие соседства. При сборке соседние зубчатые колеса 2 не должны задевать друг друга, т. е. должны находиться на таком расстоянии, чтобы выполнялось условие $l > 2r_{a_2}$. Из рис. 62 имеем $\frac{l}{2} = (r_{w_1} + r_{w_2}) \sin \frac{\pi}{p}$, тогда условие соседства примет вид

$$(r_{w_1} + r_{w_2}) \sin \frac{\pi}{p} > r_{a_2}.$$

§ 15. Основной закон зацепления (теорема Виллиса)

Для очертания боковых профилей зубьев можно использовать различные взаимогнбаемые кривые. Однако произвольно они выбраны быть не могут. Установим условия, которым должны удовлетворять боковые профили зубьев.

Изобразим соприкасающиеся в точке A два профиля 1 и 2, которые передают вращательное движение относительно осей O_1 и O_2 (рис. 63).

Угловые скорости ω_1 и ω_2 заданы, передаточное отношение $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P}$, где P — мгновенный центр относительного вращения.

Относительная скорость v_{12} точки A , принадлежащей профилю 1, направлена перпендикулярно отрезку AP . Через точку A проведем общую нормаль NN к кривым 1 и 2, которая пересечет линию центров $O_1 O_2$ в неизвестной точке P_y . Проекция относительной скорости v_{12}^n на направление нормали NN должна быть равна нулю, так как в противном случае профили 1 и 2 либо не будут соприкасаться — разойдутся, либо будут внедряться друг в друга в зависимости от направления v_{12}^n . Передача движения в обоих случаях невозможна. Но это означает, что $v_{12} \perp NN$. Следовательно, линия NN совпадает с линией AP , т. е. проходит не через произвольную точку P_y , а через точку P .

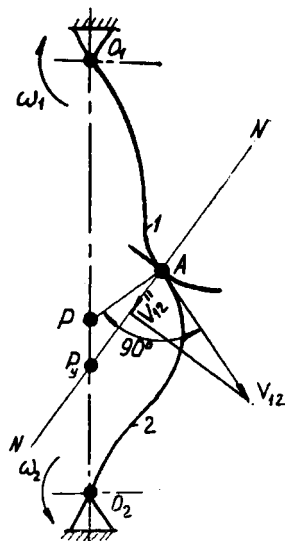


Рис. 63

Таким образом, общая нормаль в точке касания двух взаимогнбаемых кривых (профилей), передающих движение с заданным передаточным отношением, проходит через мгновенный центр вращения

в относительном движении. Это основной закон зацепления (теорема Виллиса), которому должны удовлетворять боковые профили зубьев.

Из многих взаимогнбаемых кривых, удовлетворяющих основному закону зацепления, для очертания боковых профилей зубьев наибольшее распространение получили эвольвентные, циклоидальные и круговые профили. В настоящее время подавляющее большинство зубчатых колес имеет зубья с эвольвентным профилем.

§ 16. Теория эвольвентного зацепления

Эвольвента и ее свойства. Для построения эвольвенты изобразим окружность произвольного радиуса OA (рис. 64). В точке A

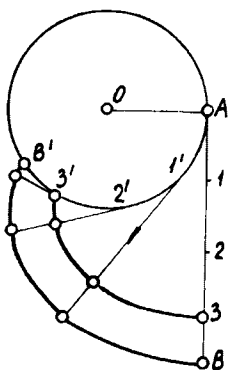


Рис. 64

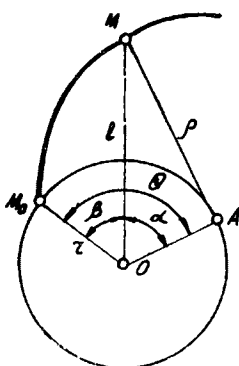


Рис. 65

к окружности проведем касательную прямую AB . От точки A на прямой AB отложим отрезки произвольной величины $A1=1$ $2=2$ $3= \dots$. На окружности от точки A отложим дуги $\overset{\frown}{A1'}=A1$, $\overset{\frown}{1'2'}=12 \dots$. Прямую AB будем катить без скольжения по окружности, тогда каждая точка прямой AB будет описывать эвольвенту. Из условий образования эвольвенты можно установить следующие ее свойства.

1. Касательная к окружности является нормалью в соответствующей точке эвольвенты. Длина нормали равна радиусу кривизны эвольвенты и соответствующей дуге окружности.

2. Эвольвенты, образованные различными точками образующей прямой AB , представляют собой эквидистантные кривые — равностоящие по нормали.

3. Эвольвенты, образованные на данной окружности, при наложении совпадают, т. е. представляют собой различные участки одной и той же эвольвенты. Следовательно, эвольвента полностью определяется окружностью, которой она образована.

Уравнение эвольвенты. На эвольвенте, образованной окружностью радиусом r (рис. 65), положение точки M определяется радиусом-вектором $\overline{OM} = l$ и углом β .

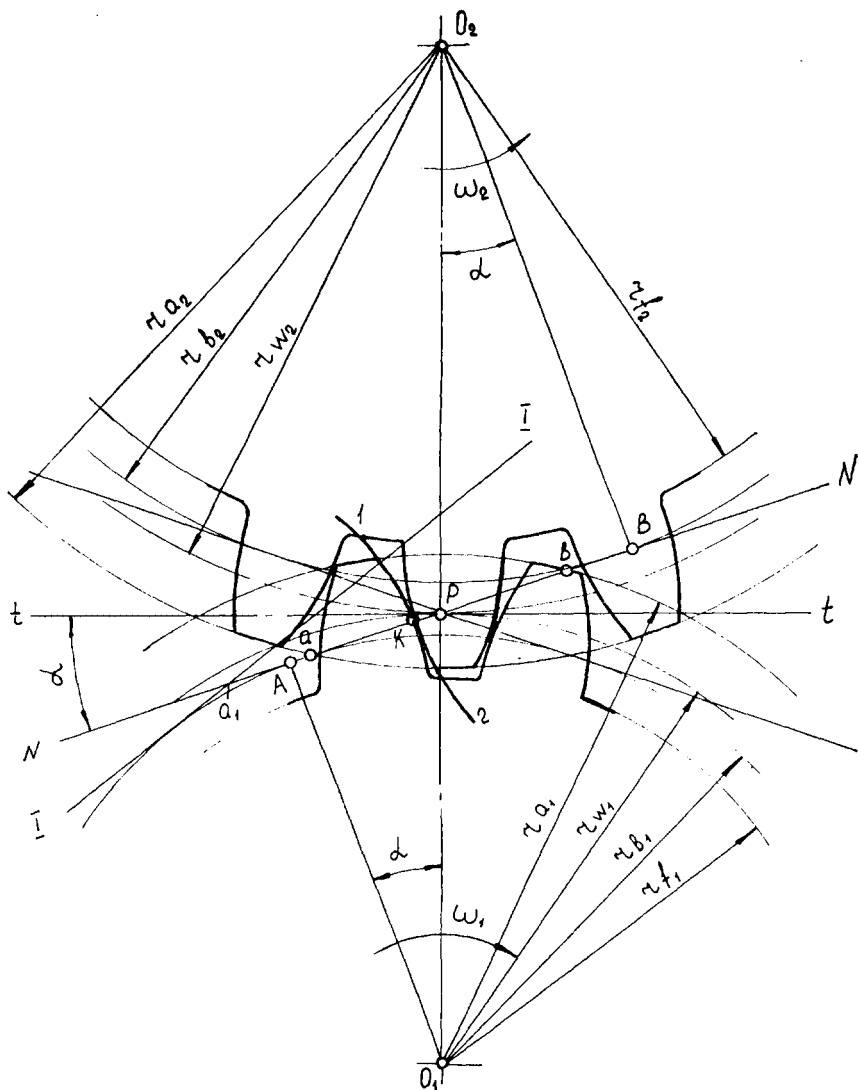


Рис. 66

Из точки M проведем касательную $\overline{AM} = r$ к окружности. Положение радиуса OA определяется углом α . Из рисунка $\beta = \theta - \alpha$, но $\theta = \frac{\overline{AM}_0}{r}$. Из свойств эвольвенты $\overline{AM}_0 = \overline{AM}$, тогда

$$\Theta = \frac{\overline{AM}}{r} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad \beta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (82)$$

Радиус-вектор $l = \frac{r}{\cos \alpha}$. Таким образом, для окружности с радиусом r параметры эвольвенты β и l полностью определяются углом α . Уравнение (83) есть уравнение эвольвенты. Его принято записывать следующим образом:

$$\beta = \operatorname{inv} \alpha \quad (\beta \text{ — инволюта } \alpha). \quad (83)$$

Эта функция используется при вычислении параметров зубчатого зацепления. Имеются специальные таблицы ее численных значений.

Внешнее эвольвентное зацепление цилиндрических зубчатых колес имеет место в том случае, когда начальные окружности касаются внешним образом. Для построения эвольвентного зубчатого зацепления полагаем известным r_{w_1} и r_{w_2} — радиусы начальных окружностей, r_{f_1} и r_{f_2} — радиусы окружностей впадин; p_w — шаг зацепления по начальным окружностям; r_{a_1} и r_{a_2} — радиусы окружностей вершин; S_w и e_w — толщину зуба и ширину впадины по начальным окружностям; α — угол зацепления. Понятие сб угле зацепления будет дано несколько позже.

Отложим межцентровое расстояние $\overline{O_1O_2} = r_{w_1} + r_{w_2}$ (рис. 66) и изобразим начальные окружности, соприкасающиеся в точке P . Через эту точку проведем прямую $t-t \perp \overline{O_1O_2}$. Затем под углом α к прямой $t-t$ проведем прямую NN , на которую из центров O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1A и O_2B . Радиусами $r_{b_1} = \overline{O_1A}$ и $r_{b_2} = \overline{O_2B}$ из центров O_1 и O_2 проведем две окружности, которые носят название основных окружностей. На прямой NN на отрезке AB возьмем произвольную точку K .

Если прямую NN катить без скольжения по первой основной окружности, а затем по второй, то точка K прямой NN опишет вначале эвольвенту 1, а затем эвольвенту 2, которые и примем за боковые профили зубьев зубчатых колес.

Радиусами r_{a_1} , r_{a_2} и r_{f_1} , r_{f_2} проведем окружности вершин и впадин, ограничивающие соответственно головки и ножки зубьев. Переход эвольвентного профиля зуба в окружность впадин должен быть плавным по окружности со стандартным радиусом $r = 0,25 m$. Затем откладываем по начальной окружности толщину зуба 1-го колеса и толщину зуба 2-го колеса, равную ширине впадины 1-го колеса. Строим обычным путем симметричные профили. Точки пересечения окружностей выступов и линии NN обозначим через a и b .

Докажем, что эвольвенты удовлетворяют основному закону зацепления. В соответствии с основным законом зацепления общая нормаль к профилям зубьев должна проходить через точку P . Линия NN — касательная к основным окружностям, на которых образованы эвольвенты, проходит через точку P и является общей нормалью к эвольвентам в точке их касания K . По-другому общая нормаль к эвольвентам не может пройти, так как она обязательно

(см. свойства эвольвенты) должна касаться основных окружностей. Следовательно, эвольвенты удовлетворяют основному закону зацепления.

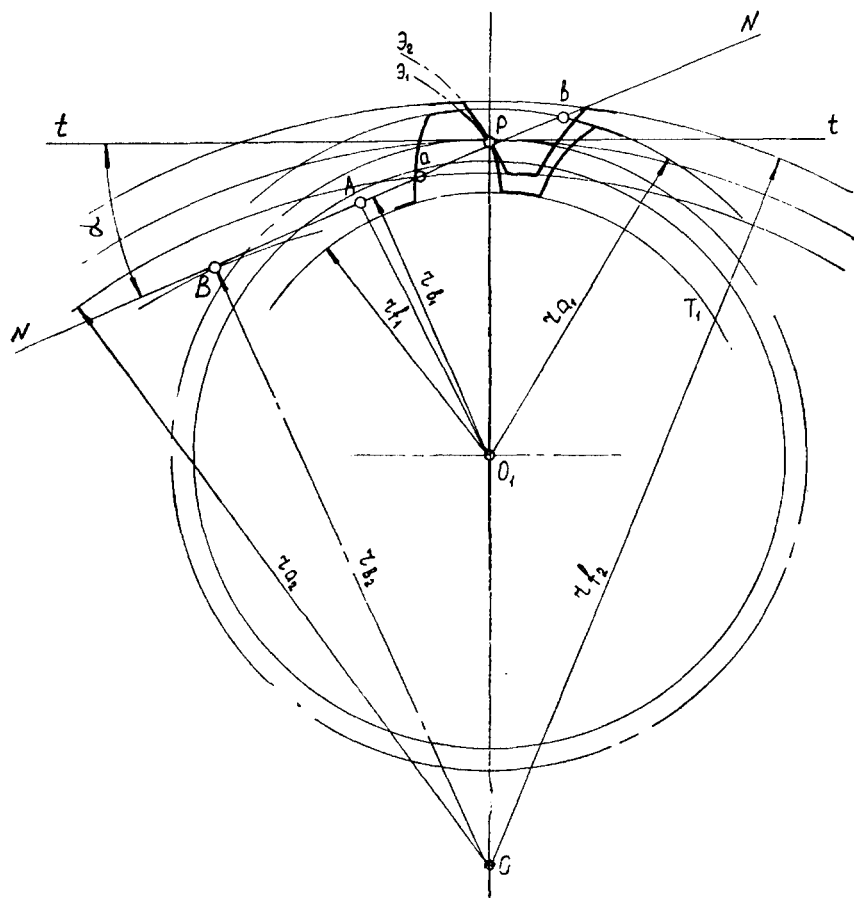


Рис. 67

Точка K контакта зубьев располагается на линии NN . Так как эта точка принята произвольной, линия NN , связанная с неподвижной плоскостью, представляет собой геометрическое место точек контакта зубьев — линию зацепления. Вне этой линии зубья не контактируют.

Рассмотрим процесс зацепления пары зубьев и установим границы линии зацепления. Если расположить зуб первого колеса так, что его профиль будет проходить через точку a , то у контактирующего с ним зуба второго колеса эвольвента в точке a будет располагаться своей верхней точкой, которая первой попадет на линию NN . Следовательно, на линии NN точка a будет началом

зацепления. Дальнейшее перемещение точки контакта зубьев по линии зацепления будет происходить до точки b , после которой зацепление уже невозможно, так как эвольвента зуба первого колеса уходит с линии зацепления. Таким образом, зацепление пары зубьев будет происходить в пределах линии ab , которая называется активной линией зацепления.

Линия AB называется линией зацепления. Это есть предел активной линии зацепления. Изменяя параметры зубчатого зацепления

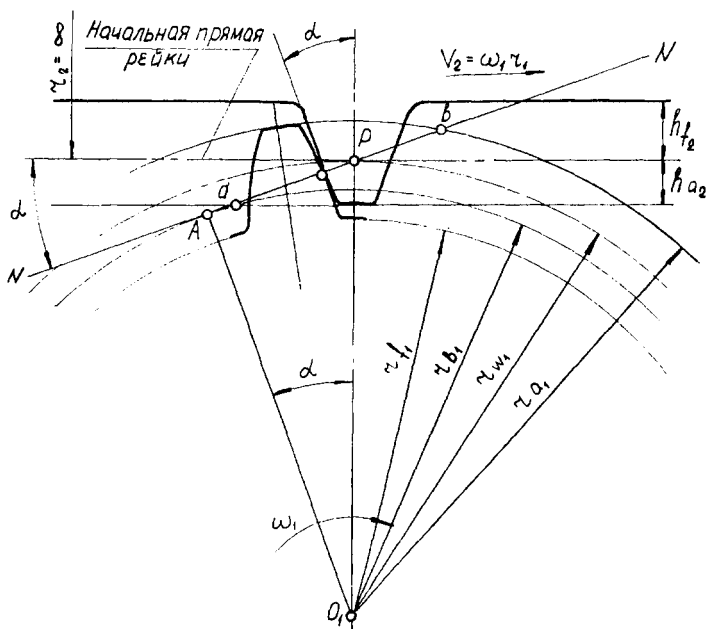


Рис. 68

(например, радиусы r_{a_1} и r_{a_2}), можно удлинить линию ab , при этом точки a и b не могут располагаться соответственно за точками A и B . Действительно, если предположить, что точка a заняла положение a_1 (см. рис. 66), то нормаль к эвольвенте будет касательной $I-I$ к основной окружности и уже не пройдет через точку P , т. е. за пределами линии AB не удовлетворяется основной закон зацепления. Рабочие участки зубьев — это участки их профилей, точки которых в процессе зацепления контактируют, передавая движение.

Внутреннее зубчатое зацепление (рис. 67) строится аналогично внешнему. Следует обратить внимание на то, что зуб большого колеса имеет вогнутый профиль.

Реечное зацепление (рис. 68) предназначено для преобразования вращательного движения зубчатого колеса в поступательное движение зубчатой рейки (возможно и обратное). Профиль зуба рейки прямолинеен. Это несложно представить, если рассматривать реечное

зацепление как предел, с одной стороны, внешнего зацепления, а с другой, — внутреннего. Следовательно, и профиль зуба рейки будет являться, с одной стороны, пределом выпуклого профиля, а с другой — вогнутого.

§ 17. Способы изготовления зубчатых колес

Существует два основных способа изготовления зубчатых колес: способ копирования и способ огибания (обкатки).

Способ копирования заключается в том, что инструменту придается форма впадины зуба (рис. 69). При рабочем движении инструмента удаляется материал зубчатого колеса, заключенный во впадине. Повторяя эту операцию в соответствии с количеством зубьев, получаем зубчатое колесо.

При изготовлении зубчатого колеса способом огибания применяется инструмент (рис. 70), имеющий форму зубчатого колеса. Ему придается возвратно поступательное движение вдоль оси.

Постепенно оси заготовки и инструмента сближаются до врезания на полную глубину зуба. Затем инструменту и заготовке дается такое относительное движение, какое бы имели два зубчатых колеса, находящихся в зацеплении. В результате часть материала заготовки, мешающая зацеплению, удаляется и образуется зубчатое колесо.

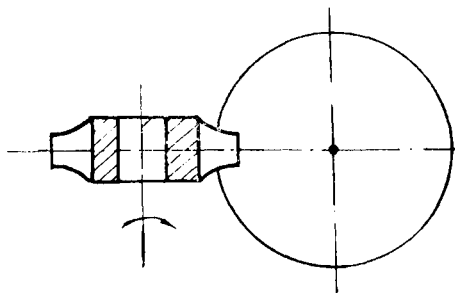


Рис. 69

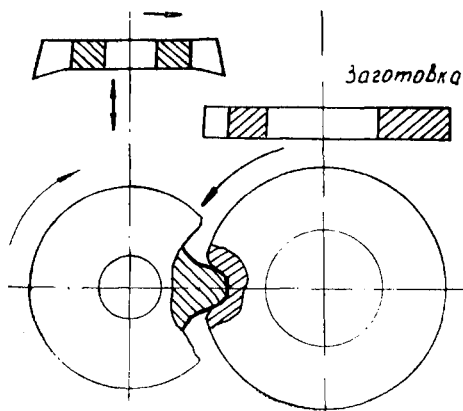


Рис. 70

Зубья рейки в сечении плоскостью, перпендикулярной ее делительной плоскости, называется сходным контуром. Отличительной особенностью рейки является постоянство шага на любой ее прямой.

Вместо зубчатого колеса в качестве инструмента может быть использована зубчатая рейка. Инструментальная стандартная рейка (рис. 71), применяемая для нарезания зубчатых колес, имеет размеры, которые выражаются через модуль. Для стандартной рейки $h_a^* = h_f^* = 1$; $c^* = 0,25$; $\alpha_0 = 20^\circ$. Контур

При нарезании зубьев зубчатого колеса его делительная окружность и делительная прямая инструментальной рейки могут иметь различное взаимное расположение. Смещение делительной прямой относительно делительной окружности обычно выражается в до-

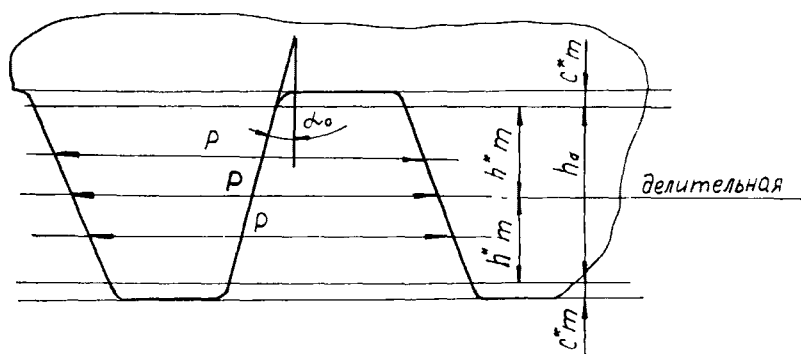


Рис. 71

лях модуля $h^* m$. Здесь x — коэффициент смещения исходного контура (рис. 72).

Возможны три случая относительного расположения делительной прямой и делительной окружности.

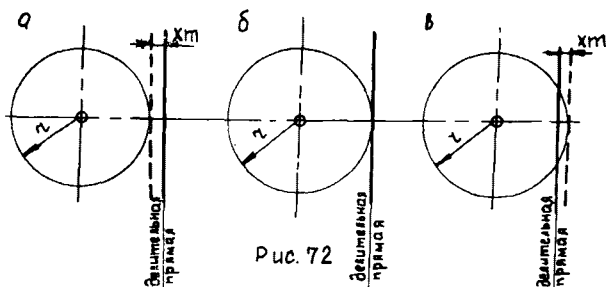


Рис. 72

Рис. 72

1. Делительная прямая располагается на расстоянии от оси колеса, большем r (см. рис. 72, а), $x > 0$. Зубчатые колеса, изготовленные при этом условии, называются положительными.

2. Делительная прямая касается делительной окружности (см. рис. 72, б), $x = 0$. Зубчатые колеса — нулевые.

3. Делительная прямая располагается на расстоянии от оси колеса, меньшем r (рис. 72, в), $x < 0$. Зубчатые колеса — отрицательные.

Во всех случаях делительная окружность и прямая зубчатой рейки, касательная к ней, перекатываются друг по другу без скольжения. Следовательно, делительная окружность является начальной при изготовлении зубчатого колеса.

В зацепление можно вводить зубчатые колеса, изготовленные с различными сдвигами нарезающего инструмента. Возможны сле-

дующие сочетания: $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 > 0$ — положительное зацепление; $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0$ — нулевое зацепление; $x_{\Sigma} = x_1 + x_2 < 0$ — отрицательное зацепление.

§ 18. Параметры зубчатого зацепления и зубчатых колес, изготовленных со смещением исходного контура

Толщина зуба колеса на делительной окружности. На делительной прямой толщина зуба равна $\frac{\pi m}{2}$. Этой же

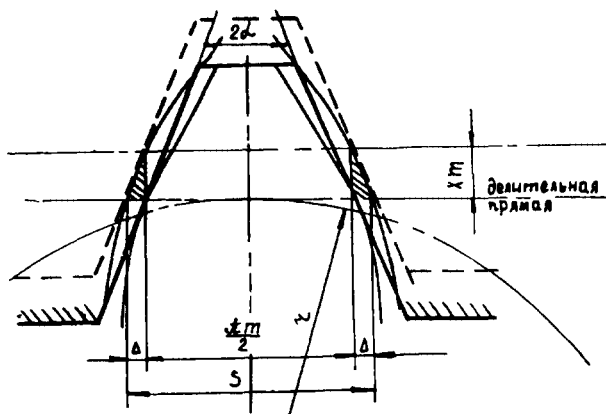


Рис. 73

величине равна толщина зуба колеса на делительной окружности при отсутствии смещения.

При смещении исходного контура (рейки) на величину xm толщина зуба увеличивается на 2Δ (рис. 73). Следовательно, $S = \frac{\pi m}{2} + 2\Delta$, но $\Delta = xm \operatorname{tg} \alpha$, поэтому

$$S = \frac{\pi m}{2} + 2xm \operatorname{tg} \alpha. \quad (84)$$

В этом выражении, как и во всех последующих, x является алгебраическим членом. При численных расчетах принимается соответствующий знак.

Толщина зуба колеса S_y на окружности произвольного радиуса r_y . Из рис. 74 имеем $\beta_y + \gamma_y = \beta + \gamma$, но

$$\beta = \operatorname{inv} \alpha; \quad \beta_y = \operatorname{inv} \alpha_y; \quad \gamma_y = \frac{S_y}{2r_y}; \quad \gamma = \frac{S}{2r}.$$

Подставляя значения величин в исходное уравнение, после несложных преобразований получим

$$S_y = 2r_y \left(\frac{S}{2r} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_y \right), \quad (85)$$

где $\cos \alpha_y = \frac{r_b}{r_y}$ (см. уравнение эвольвенты); r_b — радиус основной окружности.

Радиусы окружностей выступов и впадин зубчатого колеса. Из рис. 75 следует:

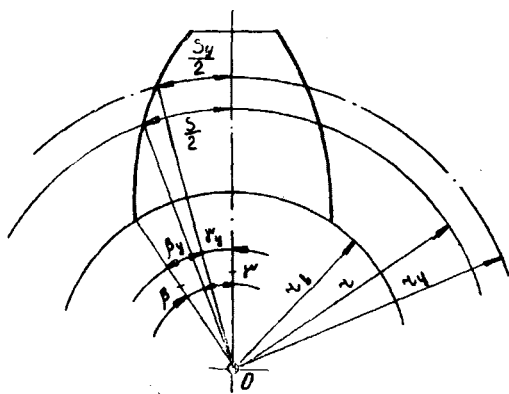


Рис. 74

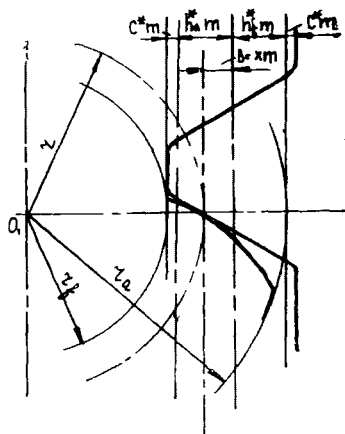


Рис. 75

$$r_a = r + xm + h_a^* m; \quad (86)$$

$$r_f = r + xm - h_f^* m - c^* m. \quad (87)$$

Угол зацепления и межосевое расстояние пары зубчатых колес. Для беззазорного зубчатого зацепления, т. е. когда зуб первого колеса полностью вписывается во впадину второго колеса (и наоборот), $S_{w_1} + S_{w_2} = p_w$ (рис. 76), так как толщина зуба колеса по начальной окружности равна ширине впадины зуба зацепляющегося с ним зубчатого колеса. Используя ранее полученные выражения, имеем

$$S_{w_1} = 2r_{w_1} \left(\frac{S_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w \right);$$

$$S_{w_2} = 2r_{w_2} \left(\frac{S_2}{2r_2} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_w \right);$$

$$p_w = \frac{2\pi r_{w_1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{w_2}}{z_2}; \quad r_1 = \frac{mz_1}{2}; \quad r_2 = \frac{mz_2}{2};$$

$$S_1 = \frac{\pi m}{2} + 2x_1 m \text{tg } \alpha; \quad S_2 = \frac{\pi m}{2} + 2x_2 m \text{tg } \alpha.$$

Подставляя значение величин в исходное выражение, после несложных преобразований получим

$$\text{inv } \alpha_w = \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \text{tg } \alpha + \text{inv } \alpha. \quad (88)$$

Межосевое расстояние (рис. 76) $a_w = O_1P + O_2P = \frac{r_{b_1} + r_{b_2}}{\cos \alpha_w}$.
 Обозначим через a межосевое расстояние для случая $\alpha = \alpha_w$, когда начальные окружности совпадают с делительными.

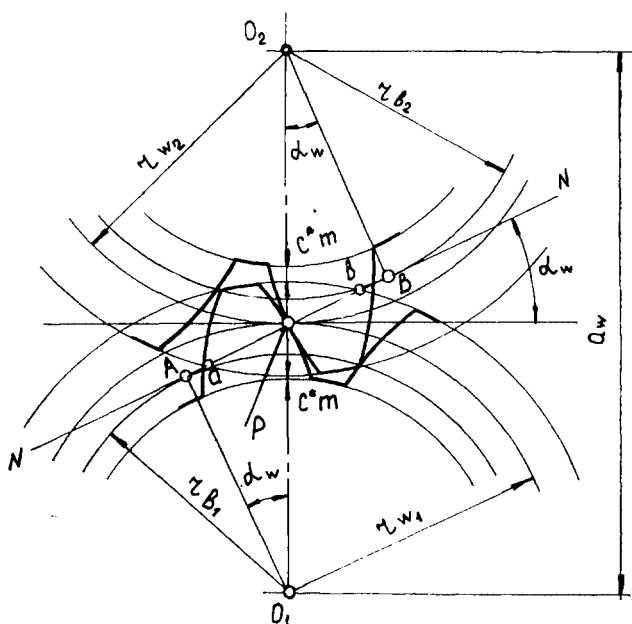


Рис. 76

$$a = r_1 + r_2 = \frac{r_{b_1} + r_{b_2}}{\cos \alpha} = \frac{m}{2} (z_1 + z_2),$$

тогда

$$\frac{a_w}{a} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \quad \text{и} \quad a_w = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (89)$$

§ 19. Относительное скольжение эвольвентных профилей зубьев

Боковые профили зубьев зубчатых колес представляют собой взаимоогibaемые кривые, т. е. передают движение от одного профиля другому при качении и при скольжении друг по другу. Величина скольжения, т. е. относительной скорости контактных точек профилей, взаимодействующих зубьев зубчатых колес наряду с другими факторами определяет потери мощности на трение скольжения и износ зубчатого зацепления.

Для оценки качества зубчатого зацепления пользуются понятием удельного скольжения. Для нахождения удельного скольжения рассмотрим пару зубчатых колес (рис. 77), зубья которых в рассматриваемый момент времени соприкасаются в произвольной точке K .

круглые скорости точки K , принадлежащей обим профилям, $v_{y_1} = \omega_1(O_1K)$ и $v_{y_2} = \omega_2(O_2K)$. Проекции этих скоростей равны между собой в соответствии с основным законом зацепления, проекции

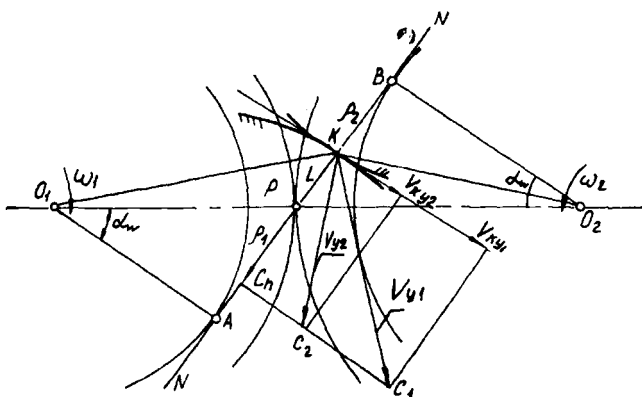


Рис. 77

же скоростей $v_{K_{y_1}}$ и $v_{K_{y_2}}$ [на направление касательной к профилям различны (кроме точки K , совпадающей с точкой P):

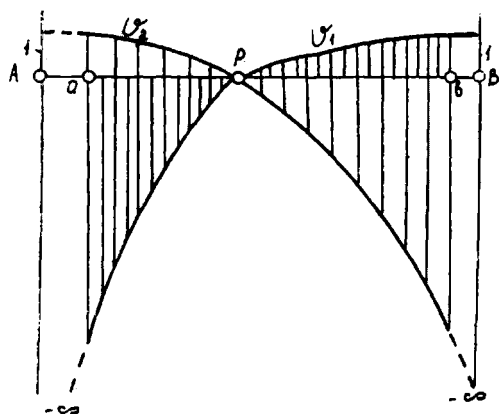


Рис. 78

$$v_{K_{y_1}} = \omega_1 \rho_1; \quad v_{K_{y_2}} = \omega_2 \rho_2,$$

где $\rho_1 = AK$ и $\rho_2 = BK$ — радиусы кривизны профилей зубьев.

Скорость скольжения первого профиля по второму $v_{S_{y_1-2}} = v_{K_{y_1}} - v_{K_{y_2}}$, скорость скольжения второго профиля по первому $v_{S_{y_2-1}} = v_{K_{y_2}} - v_{K_{y_1}}$. Обычно пользуются понятием удельного скольжения $\vartheta_1 = \frac{v_{S_{y_1-2}}}{v_{K_{y_1}}}$ и $\vartheta_2 = \frac{v_{S_{y_2-1}}}{v_{K_{y_2}}}$.

Подставляя значения скоростей, выраженные через ω и ρ , получим

$$\vartheta_1 = 1 - \frac{\rho_2 \omega_2}{\rho_1 \omega_1}; \quad \vartheta_2 = 1 - \frac{\rho_1 \omega_1}{\rho_2 \omega_2}, \quad \text{но} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Тогда удельные скольжения на профилях зубьев колес 1 и 2 соответственно будут равны:

$$\vartheta_1 = 1 - \frac{\rho_2 z_1}{\rho_1 z_2}; \quad \vartheta_2 = 1 - \frac{\rho_1 z_2}{\rho_2 z_1}. \quad (90)$$

Графическая зависимость φ_1 и φ_2 от положения точки контакта зубьев на линии зацепления показана на рис. 78. Максимальные значения удельных скольжений не должны значительно отличаться друг от друга. Это достигается путем изменения положения актив-

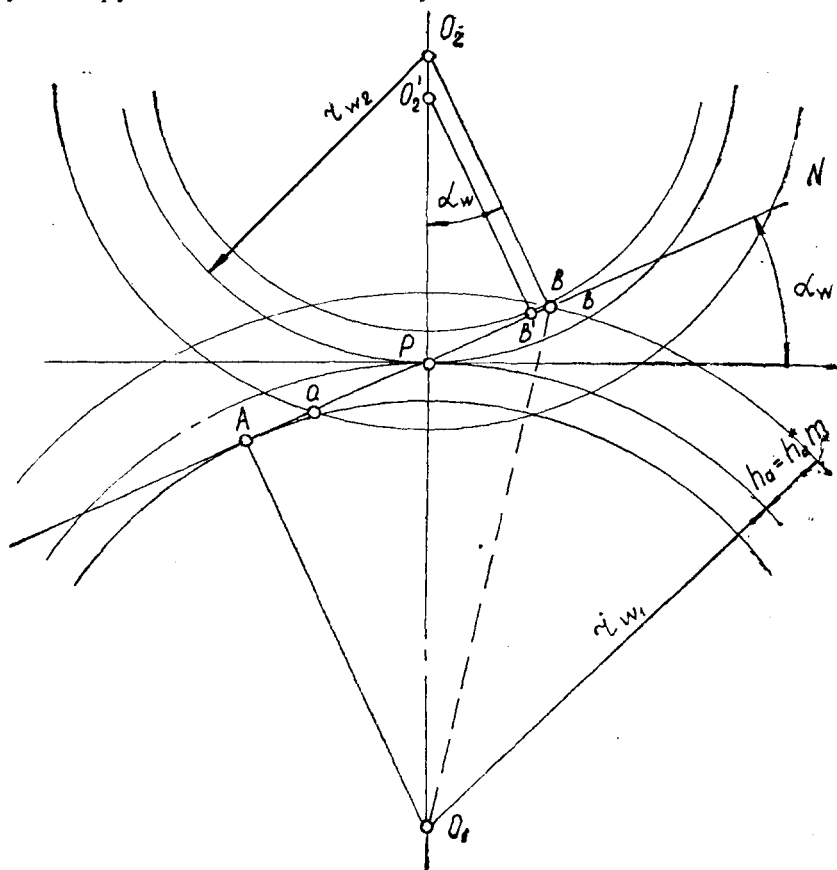


Рис. 79

ной линии зацепления ab на линии зацепления AB при соответствующем выборе коэффициентов смещения x_1 и x_2 в процессе изготовления зубчатых колес.

§ 20. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного без смещения исходного контура

В общем случае зацепления зубчатых колес одно колесо будет меньше другого (рис. 79). Рассмотрим такой случай, когда крайняя точка активной линии зацепления b совпадает с крайней точкой линии зацепления B . Если теперь для малого зубчатого колеса 2 с числом зубьев z_2 принять число зубьев меньше, чем z_2 при всех прочих равных условиях, то ось колеса сместится в положение O_2' , а точка B в положение B' , т. е. активная линия зацепления, огра-

ниченная точкой b , выйдет за пределы теоретической линии зацепления. Ранее было показано, что за пределами линии AB зацепление невозможно, так как не удовлетворяется основной закон зацепления. Следовательно, для рассматриваемого случая уменьшать число зубьев на колесе 2 нельзя, т. е. $z_2 = z_{\min}$, где z_{\min} — наименьшее число зубьев на зубчатом колесе. Найдем это число. Из ΔO_1O_2B (см. рис. 79) имеем

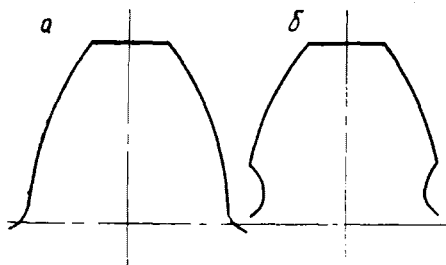


Рис. 80

— $2(O_1O_2)(O_2B) \cos \alpha_w$, (91)
но

$$O_1B^2 = O_1O_2^2 + O_2B^2 - 2(O_1O_2)(O_2B) \cos \alpha_w, \quad (91)$$

$$O_1B = r_{w_1} + h_a^* m; \quad O_2B = r_{w_2} \cos \alpha_w;$$

$$O_1O_2 = r_{w_1} + r_{w_2}, \quad (92)$$

тогда

$$(r_{w_1} + h_a^* m)^2 = (r_{w_1} + r_{w_2})^2 + r_{w_2}^2 \cos^2 \alpha_w - 2(r_{w_1} + r_{w_2}) r_{w_2} \cos^2 \alpha_w. \quad (93)$$

Обозначая $\frac{r_{w_1}}{r_{w_2}} = u > 1$ и учитывая, что $r_{w_2} = \frac{mz_2}{2}$, после деления левой и правой частей последнего выражения на $r_{w_2}^2$ получим

$$\left(u + \frac{2h_a^*}{z_2}\right)^2 = (u+1)^2 + \cos^2 \alpha_w - 2(u+1) \cos^2 \alpha_w. \quad (94)$$

Раскрывая скобки в правой части этого выражения, после несложных преобразований будем иметь

$$\left(u + \frac{2h_a^*}{z_2}\right)^2 = u^2 + (2u+1) \sin^2 \alpha_w,$$

откуда

$$z_{\min} = z_2 = \frac{2h_a^*}{\sqrt{u^2 + (2u+1) \sin^2 \alpha_w} - u}, \quad (95)$$

или

$$z_{\min} = 2h_a^* \frac{\sqrt{u^2 + (2u+1) \sin^2 \alpha_w} + u}{(2u+1) \sin^2 \alpha_w}. \quad (96)$$

Если зацепление колеса 2 происходит с зубчатой рейкой, то $r_{w_1} = \infty$ и $u = \infty$. Разделив числитель и знаменатель последнего выражения на u , получим

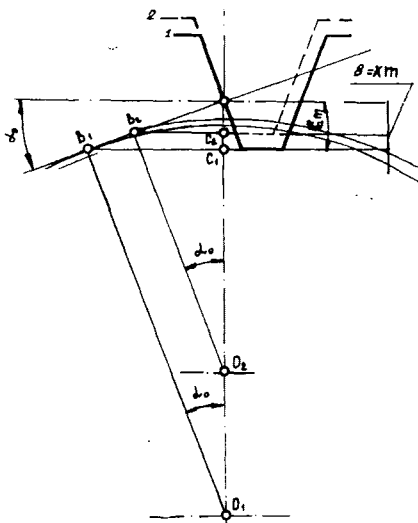


Рис. 81

$$z_{\min} = 2h_a^* \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \sin^2 \alpha_w} + 1}{\left(2 + \frac{1}{u}\right) \sin^2 \alpha_w}. \quad (97)$$

Подставив в (97) значение $u = \infty$, будем иметь

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha_w} \quad (98)$$

Если $h_a^* = 1$, $\alpha_w = 20^\circ$, то $z_{\min} = 17$.

В процессе изготовления зубчатого колеса методом огибания удаляется та часть материала колеса, которая мешает зацеплению, т. е.

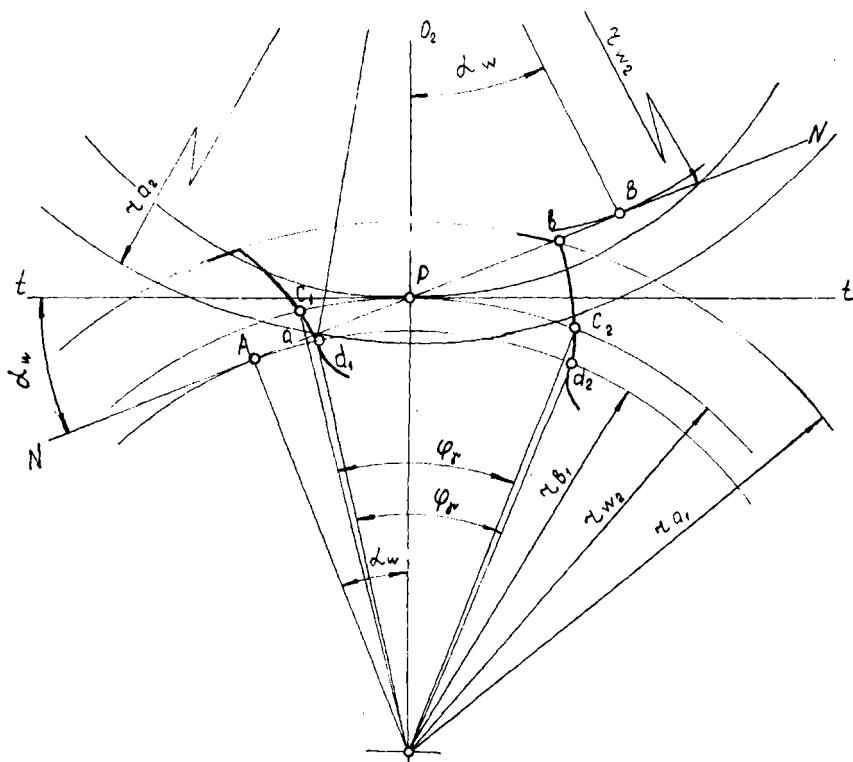


Рис. 82

материал, сосредоточенный во впадинах зубьев зубчатых колес. Таким образом, вырисовывается зуб нормальной формы (рис. 80, а).

Если на зубчатом колесе принять число зубьев $z < z_{\min}$, то удалится еще дополнительная часть материала и зуб получается подрезанным (рис. 80, б). Это нежелательно, так как он ослабляется. Подрез мало ощутим при $z \geq 14$, поэтому практически можно признать $z_{\min \text{ пр}} = 14$.

§ 21. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного со смещением исходного контура

Для получения числа зубьев на зубчатом колесе $z < z_{\min}$ без подреза необходимо осуществить положительное смещение нарезающего инструмента. Найдем соотношение между числом зубьев, которое может быть нарезано на зубчатом колесе без подреза, и смещением исходного контура.

Для зубчатого колеса с осью O_1 и числом зубьев $z = z_{\min}$ линия вершин (рис. 81) инструментальной рейки (за линию вершин принимается прямая, ограничивающая прямолинейную часть зуба рейки) проходит через точку B_1 — крайнюю точку линии зацепления.

У зубчатого колеса, для которого $z < z_{\min}$, ось колеса займет положение O_2 , а крайняя точка линии зацепления — положение B_2 . Для того, чтобы избежать подреза, рейку следует переместить на величину xm так, чтобы линия вершин рейки прошла через точку B_2 . На отрезке O_1P показаны точки C_1 и C_2 . Треугольники O_1B_1P и O_2B_2P будут подобны как треугольники с взаимно параллельными сторонами. Следовательно,

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{C_1P}{C_2P},$$

или

$$\frac{\frac{mz_{\min}}{2}}{\frac{mz}{2}} = \frac{h_a^* m}{h_a^* m - xm},$$

откуда

$$z = z_{\min} \left(1 - \frac{x}{h_a^*} \right) \text{ и } x = h_a^* \frac{z_{\min} - z}{z_{\min}}.$$

При таком относительном сдвиге подреза зубьев не будет.

§ 22. Коэффициент перекрытия

Началом зацепления пары зубьев будет положение, когда эвольвента зуба зубчатого колеса попадает в точку a (рис. 82). Заканчивается зацепление при положении эвольвенты зуба, когда она попадает в точку b . На протяжении зацепления зубчатое колесо повернется на угол φ_{γ} , который называется углом перекрытия зубчатого колеса передачи.

Для оценки качества зубчатого зацепления пользуются понятием коэффициента перекрытия зубчатой передачи. Коэффициентом перекрытия называется отношение угла перекрытия зубчатого колеса передачи к его угловому шагу. Следовательно,

$$\varepsilon_{\gamma} = \frac{\varphi_{\gamma 1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\gamma 2}}{\tau_2}. \quad (100)$$

Коэффициент перекрытия можно выразить через активную линию зацепления ab . Из рис. 82 имеем

$$\varphi_{\gamma_1} = \frac{\cup d_1 d_2}{r_{b_1}}.$$

Из свойств эвольвенты (из условий ее образования)

$$\cup d_1 d_2 = ab_2,$$

поэтому

$$\varphi_{\gamma_1} = \frac{ab}{r_{b_1}} = \frac{ab}{\cos \alpha_w r_{w_1}}, \text{ так как } \frac{r_{b_1}}{r_{w_1}} = \cos \alpha_w. \quad (101)$$

Подставляя в уравнение (100) значение φ_{γ_1} по выражению (101) и имея в виду, что $\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}$ и $r_{w_1} = \frac{mz_1}{2}$, получим

$$\varepsilon_{\gamma} = \frac{ab2z_1}{\cos \alpha_w m z_1 2\pi} = \frac{ab}{\rho_w \cos \alpha_w}. \quad (102)$$

При этом надо учитывать, что если $\varepsilon_{\gamma} = 1$, то $\varphi_{\gamma} = \tau$ и в зацеплении все время находится одна пара зубьев; если же $\varepsilon_{\gamma} = 2$, то $\varphi_{\gamma} = 2\tau$ и в зацеплении все время находится две пары зубьев; при $\varepsilon_{\gamma} = 1,7$ в зацеплении 70% времени находится две пары зубьев и 30% одна пара зубьев.

Следует принимать коэффициент перекрытия $\varepsilon_{\gamma} > 1$, в противном случае, когда одна пара зубьев выйдет из зацепления (в точке b), другая пара еще не войдет в зацепление, т. е. в зацеплении будут перерывы, чего не следует допускать. Обычно $\varepsilon_{\gamma} \gg 1,1$. Для повышения работоспособности зубчатого зацепления необходимо увеличивать ε_{γ} . При увеличении ε_{γ} нагрузка между зубьями будет передаваться одновременно двумя парами зубьев более длительное время.

Коэффициент перекрытия обычно определяется аналитическим путем. Из чертежа (см. рис. 82) имеем

$$ab = aP + Pb = aB - PB + Ab - AP,$$

кроме того,

$$\rho_w \cos \alpha_w = m\pi \cos \alpha_w = \frac{2\pi}{z} \frac{mz}{2} \cos \alpha_w = \frac{2\pi}{z} r_w \cos \alpha_w = \frac{2\pi}{z} r_b.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma} &= \frac{z_2}{2\pi} \left(\frac{aB}{r_{b_2}} - \frac{PB}{r_{b_2}} \right) + \frac{z_1}{2\pi} \left(\frac{Ab}{r_{b_1}} - \frac{AP}{r_{b_1}} \right) = \\ &= \frac{z_1 \operatorname{tg} \alpha_{a_1} + z_2 \operatorname{tg} \alpha_{a_2} - (z_1 + z_2) \operatorname{tg} \alpha_w}{2\pi}, \end{aligned} \quad (103)$$

так как $\frac{aB}{r_{b_2}} = \operatorname{tg} \alpha_{a_1}$; $\frac{PB}{r_{b_2}} = \operatorname{tg} \alpha_w$; $\frac{Ab}{r_{b_1}} = \operatorname{tg} \alpha_{a_2}$; $\frac{AP}{r_{b_1}} = \operatorname{tg} \alpha_w$; где $\alpha_a = \arccos \frac{r_b}{r_a}$.

§ 23. Коническое зубчатое зацепление

Коническое зубчатое зацепление применяется при передаче вращательного движения между пересекающимися осями I и II (рис. 83). Для заданных значений угла Σ пересечения осей I и II и переда-

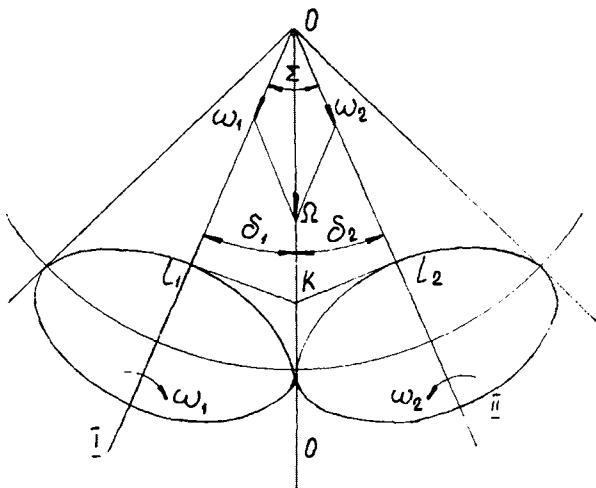


Рис. 83

точного отношения $u_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}$ найдем аксоиды относительного движения — поверхности, при взаимном перекатывании которых осуществляется этот закон движения.

Если всей системе (см. рис. 83) придать обращенное движение с угловой скоростью ω_1 , то угловая скорость в относительном движении $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ (ω_1 принимается с обратным знаком). Этим определится положение мгновенной оси относительного движения OO . Геометрические места линий OO , принадлежащие первому и второму звеньям в относительном движении, образуют соответственно две конические поверхности — аксоиды относительного движения, которые называются начальными конусами.

Для определения этих конусов найдем углы δ_1 и δ_2 . Одно уравнение будет $\delta_1 + \delta_2 = \Sigma$. Для получения другого уравнения возьмем на оси OO произвольную точку K , являющуюся общей точкой двух начальных конусов. Окружная скорость этой точки $v_K = \omega_1 KL_1 = = \omega_2 KL_2$, но $KL_2 = OK \sin \delta_2$ и $KL_1 = OK \sin \delta_1$, значит,

$$\omega_1 OK \sin \delta_1 = \omega_2 OK \sin \delta_2 \quad \text{и} \quad \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = u_{1-2}. \quad (104)$$

Решая уравнения совместно, получим

$$u_{1-2} = \frac{\sin(\Sigma - \delta_1)}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \Sigma \cos \delta_1 - \cos \Sigma \sin \delta_1}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \Sigma}{\text{tg } \delta_1} - \cos \Sigma, \quad (105)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{u_1 - 1 + \cos \Sigma}, \quad (106)$$

$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1. \quad (107)$$

Установим, на какой поверхности будут располагаться профили зубьев конических зубчатых колес. Точки профиля первого зубчатого колеса, перемещаясь в процессе зацепления, контактируют с точками профиля второго колеса. Контакт этих точек возможен, если они будут находиться на одном и том же расстоянии от точки O — пересечения осей I и II. Следовательно, поверхность, на которой располагаются профили зубьев, будет геометрическим местом точек, равноудаленных от точки O в пространстве, т. е. сферой с центром в точке O .

Таким образом, для построения конического зубчатого зацепления следует аналогично предыдущему проделать все построения на сферической поверхности. Совокупность сферических сечений с непрерывно уменьшающимся радиусом конического зубчатого зацепления образует конические зубчатые колеса с зубьями, располагающимися вдоль образующих начальных конусов (рис. 84). Коническое зубчатое зацепление можно построить на сферической поверхности. Однако

в целях упрощения данной задачи и использования ранее полученных результатов для зубчатого зацепления на плоскости коническую зубчатую передачу приводят обычно к эвольвентной цилиндрической передаче. Так как сфера на плоскость не разворачивается, часть сферической поверхности, на которой располагается коническое зацепление, можно приближенно заменить поверхностями дополнительных конусов с вершинами O_1 и O_2 . Развертывая эти дополнительные конусы на плоскость, получаем два сектора и зацепление на плоскости (рис. 85). На $\cup l_1 l_2$ и $\cup n_1 n_2$ располагаются зубья конических колес, числа которых соответственно будут z_1 и z_2 .

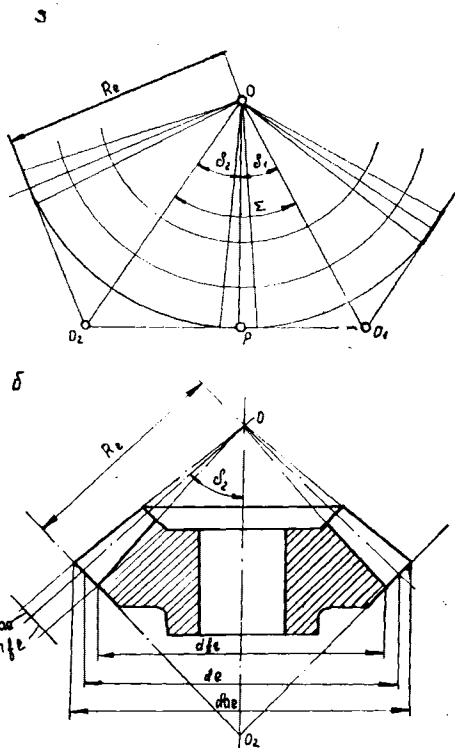


Рис. 84

Во все ранее полученные выражения зубчатого зацепления на плоскости входят числа зубьев, располагающихся на всей окружности колес. Обозначим через $z_{v_{t_1}}$ и $z_{v_{t_2}}$ числа зубьев на полных

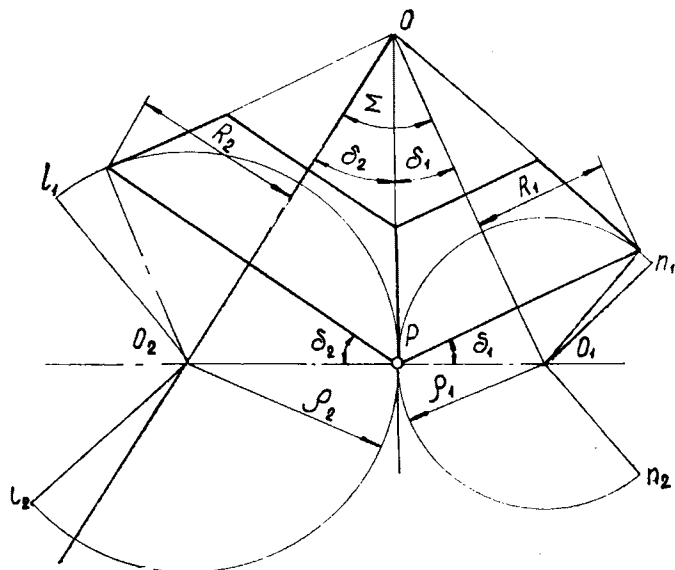


Рис. 85

окружностях разверток. Эти числа носят название чисел зубьев эквивалентных цилиндрических зубчатых колес. Найдем их значение. Из рис. 85 имеем:

$$\pi d_{e1} = z_1 p_{te} \quad (108)$$

и

$$2\rho_1 = z_{v_{t_1}} p, \quad (109)$$

откуда

$$\frac{\pi d_{e1}}{2\rho_1} = \frac{z_1 p_{te}}{z_{v_{t_1}} p}. \quad (110)$$

Поскольку в эвольвентной цилиндрической зубчатой передаче размеры и форма зубьев зубчатых колес идентичны размерам и форме зубьев зубчатых колес конической передачи в сечении их дополнительными конусами, то $\rho_{te} = \rho$ и

$$\frac{d_{e1}}{2\rho_1} = \frac{z_1}{z_{v_{t_1}}}, \quad (111)$$

но

$$\frac{d_{e1}}{2\rho_1} = \cos \delta_1, \quad (112)$$

поэтому

$$z_{v_{t_1}} = \frac{z_1}{\cos \delta_1}, \quad (113)$$

аналогично

$$z_{v_{t_2}} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}. \quad (114)$$

Таким образом, используя числа зубьев $z_{v_{t_1}}$ и $z_{v_{t_2}}$, для конического зубчатого зацепления можно применить все полученные ранее выражения для передачи цилиндрическими колесами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин.— М.: Высшая школа, 1975.
 2. Кожевников С. Н. Теория механизмов и машин.— М.: Машиностроение, 1973.
 3. Баранов Г. Г. Курс теории механизмов и машин.— М.: Машиностроение, 1967.
 4. Артоболевский С. И. Теория механизмов и машин.— М.: Высшая школа, 1965.
 5. Юдин В. А., Петрокас Л. В. Теория механизмов и машин.— М.: Высшая школа, 1977.
 6. Шепетильников В. А. Уравновешивание машин и приборов.— М.: Машиностроение, 1965.
 7. Колчин Н. И. Механика машин.— М.: Машгиз, 1948—1957, Ч. I—V.
 8. Зиновьев В. А. Курс теории механизмов и машин.— М.: Машгиз, 1958.
 9. Корняко А. С. Теория механизмов и машин.— Киев: Высшая школа, 1976.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава I. Строение механизмов	5
§ 1. Кинематические пары	5
§ 2. Кинематические цепи. Механизмы	6
§ 3. Плоские механизмы	8
§ 4. Лишние степени подвижности и пассивные условия связей	17
Глава II. Кинематический анализ рычажных механизмов	19
§ 5. Построение планов скоростей и ускорений	19
§ 6. Планы скоростей и ускорений для групп 2-го класса	25
§ 7. Планы скоростей и ускорений для групп 3-го класса	30
§ 8. Построение кинематических диаграмм	32
§ 9. Аналитическая кинематика механизмов	35
Глава III. Кинематический синтез механизмов	42
§ 10. Условие существования кривошипа в четырехзвенном механизме	42
§ 11. Синтез четырехзвенного механизма по заданным условиям	43
Глава IV. Зубчатые механизмы	49
§ 12. Основные параметры зубчатого зацепления	51
§ 13. Зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес	52
§ 14. Дифференциальные и планетарные зубчатые механизмы	54
§ 15. Основной закон зацепления (теорема Виллиса)	59
§ 16. Теория эвольвентного зацепления	60
§ 17. Способы изготовления зубчатых колес	65
§ 18. Параметры зубчатого зацепления и зубчатых колес, изготовленных со смещением исходного контура	67
§ 19. Относительное скольжение эвольвентных профилей зубьев	69
§ 20. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного без смещения исходного контура	71
§ 21. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного со смещением исходного контура	74
§ 22. Коэффициент перекрытия	74
§ 23. Коническое зубчатое зацепление	76
Литература	79

Вениамин Израилевич СОКОЛОВСКИЙ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие

Научный редактор доц. канд. техн. наук **Ю. В. Песин**

Редактор издательства **Т. Н. Газитарова**

Технический редактор **И. М. Олерская**

Корректор **Н. Я. Бель**

Сдано в набор 9.01.79. Подписано к печати 29.10.79. НС 11256.
 Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1. Лит. гарнитура. Высокая печать.
 Усл. печ. л. 5,0. Уч.-изд. л. 4,65. Тираж 4000. Заказ 74. Цена 21 коп.

Редакционно-издательский отдел УПИ им. С. М. Кирова, 620002. Свердловск,
 УПИ, главный учебный корпус

Типография изд-ва «Уральский рабочий», 620151, Свердловск, пр. Ленина, 49.

21 коп

16 руб

