

В. И. СОКОЛОВСКИЙ

теория
МЕХАНИЗМОВ
И МАШИН

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
УРАЛЬСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. С. М. КИРОВА

В. И. СОКОЛОВСКИЙ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

УДК 621.01

АННОТАЦИЯ

Конспект лекций по теории механизмов и машин представляет собой изложение основного содержания лекционного курса для студентов машиностроительных специальностей вузов. Он составлен в соответствии с учебной программой для механических специальностей вузов. В книге рассмотрены основные вопросы исследования механизмов и машин.

Конспект предназначен для студентов машиностроительных специальностей всех видов обучения, а также может быть использован студентами других специальностей, изучающих курс теории механизмов и машин.

Глава I. СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ

§ 1. Кинематические пары

Теория кинематических пар была разработана русским ученым Х. И. Гохманом и опубликована в 1890 г. Дальнейшее развитие теория получила в трудах советских ученых А. П. Малышева, В. В. Добровольского, И. И. Артоболевского и др.

Кинематической парой называется подвижное соединение двух тел. Тела, образующие пару, называются звеньями, а точ-

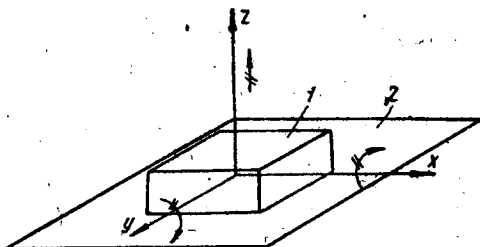


Рис. 1.

ка, линия, поверхность или их сочетание, по которым соприкасаются звенья, называются элементами. Из этого следует, что существование кинематической пары определяется тремя условиями: наличием двух звеньев, непосредственным контактом звеньев и возможностью относительного движения звеньев, образующих кинематическую пару. Пара перестает существовать при отсутствии какого-либо из этих условий.

Кинематическая пара накладывает ограничения на относительное движение звеньев. Эти ограничения называются условиями связи или связями. Так, в кинематической паре, состоящей из звеньев 1 и 2 (рис. 1), невозможны относительные движения — поступательное вдоль оси z и вращательные вдоль осей x и y , так как при этих движениях нарушается контакт звеньев и пара перестает существовать.

В зависимости от числа условий связи, накладываемых парой на относительное движение звеньев, различают классы кинематических пар. Класс кинематической пары определяется числом условий связи.

Свободное твердое тело в пространстве (рис. 2) может иметь шесть движений — шесть степеней свободы: это поступательное движение вдоль и вращательное вокруг каждой из осей. Обозначим через S число условий связи и через H число степеней свободы в кинематической паре. Тогда

$$H = 6 - S \text{ и } S = 6 - H. \quad (1)$$

В табл. 1 приведены примеры кинематических пар различных классов.

Следует обратить внимание на то, что винтовая кинематическая пара (рис. 3, а) имеет два относительных движения и, казалось бы, ее следует отнести к парам 4-го класса, так как число условий связи

$S = 6 - H = 6 - 2 = 4$. В действительности винтовая пара имеет только одно *независимое* относительное движение, так как осевое перемещение связано с вращательным зависимостью $x = f(\varphi)$, опреде-

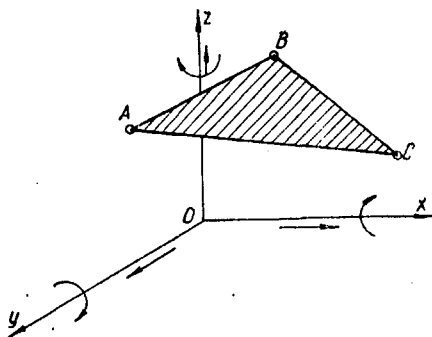


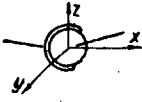

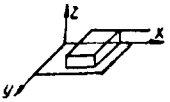



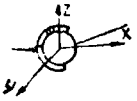

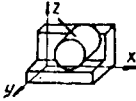

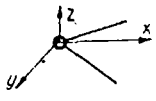

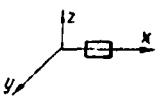



Рис. 2

Таблица 1

Классификация кинематических пар

Класс	Схема	Название пары	Обозначение	Возможные относительные движения
1-й		Точечная пространственная		ВВВП
2-й		Линейчатая пространственная		ВВП
		Цилиндросферическая		ВВП

Табл. 1 (окончание)

Класс	Схема	Название пары	Обозначение	Возможные относительные движения
3-й		Сферическая		ВВВ
		Плоская		ВПП
4-й		Цилиндрическая		ВП
		Сферическая с пальцем		ВВ
		Профильная		ВП
5-й		Вращательная		В
		Поступательная		П
		Винтовая		В (П)

Примечание. В — вращательное движение; П — поступательное.

ляемой углом подъема и шагом винтовой нарезки. Поэтому винтовая пара имеет число связей $S=6-H=6-1=5$ и относится к парам 5-го класса. Это согласуется с частным случаем винтовой пары. Например, при угле подъема винтовой нарезки, равном 0° , пара образует кольцевой выступ (рис. 3, б) и превращается во вращательную

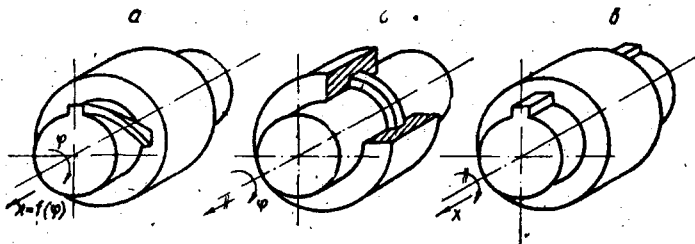


Рис. 3.

пару 5-го класса. При угле же подъема винтовой нарезки, равном $\frac{\pi}{2}$, она образует выступ, расположенный вдоль оси пары (рис. 3, в), и становится поступательной парой 5-го класса.

Таким образом, при рассмотрении кинематических пар, а в дальнейшем и их сочетаний учитываются только *независимые* движения.

§ 2. Кинематические цепи. Механизмы

Кинематической цепью называется сочетание звеньев, входящих в кинематические пары. Кинематическая цепь может быть *незамкнутой*, когда в ней имеются звенья со свободными элементами кинематических пар (рис. 4, а), и *замкнутой*, когда в ней нет звеньев, имеющих свободные элементы кинематических пар (рис. 4, б).

В самом общем случае кинематическая цепь может состоять из m

звеньев, входящих в p_1 пар 1-го класса, p_2 пар 2-го класса, p_3 пар 3-го класса, p_4 пар 4-го класса и p_5 пар 5-го класса. Тогда на основании выражения (1) число степеней свободы кинематической цепи равно:

$$H = 6m - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (2)$$

Обычно число степеней свободы кинематической цепи рассматривают относительно одного какого-либо звена, принятого за не-

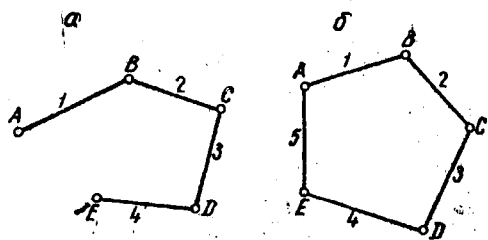


Рис. 4.

подвижное. В этом случае имеется $n = m - 1$ подвижных звеньев. Число степеней свободы, которое обозначают через W , называется числом степеней подвижности:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3)$$

Механизмом называется такая кинематическая цепь, в которой при заданном законе движения одного или нескольких звеньев все остальные звенья движутся вполне определенным образом.

В каждом механизме имеется 3 группы звеньев.

1. Стойка — неподвижное звено. Стойка в механизме может быть только одна, так как все неподвижные звенья являются единым целым.

2. Ведущие звенья — это звенья, закон движения которых задан. Так как законы движения ведущих звеньев могут быть заданы произвольно, т. е. они являются независимыми, то число ведущих звеньев в механизме равно W — числу степеней подвижности, которое в соответствии с выражением (3) определяет число независимых движений в механизме.

3. Ведомые звенья — это звенья, закон движения которых определяется движением ведущих звеньев.

Выражение (3) носит название структурной формулы механизма, так как полностью определяет строение механизма. Действительно, величина W показывает число ведущих звеньев, n — число всех подвижных звеньев механизма, а p — число пар различных классов.

Кинематические пары накладывают на относительное движение звеньев определенные условия связи. В механизме имеется несколько кинематических пар, поэтому может оказаться, что некоторые условия связи будут общими, например, все кинематические пары могут исключать движение вдоль оси x .

В зависимости от количества этих общих условий связи различают семейства механизмов. Номер семейства механизмов определяется числом общих условий связи. Для каждого семейства механизмов применима своя структурная формула. Если в механизме нет общих условий связи, то такой механизм будет механизмом нулевого семейства. Его структурной формулой будет уже известная формула (3).

Структурная формула для механизма 1-го семейства:

$$W = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2. \quad (4)$$

Это объясняется тем, что при наличии одного общего условия связи каждое звено будет иметь уже не 6 степеней свободы, а только 5, поэтому в выражении (4) первый член будет равен $5n$. Пара 5-го класса накладывает 5 условий связи, но одно условие связи учтено как общее в первом члене выражения (4), поэтому пара 5-го класса уже будет накладывать только 4 условия связи и второй член в выражении (4) будет равен $4p_5$ и т. д.

Структурная формула для механизма 2-го семейства:

$$W = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3, \quad (5)$$

3-го семейства

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (6)$$

4-го семейства

$$W = 2n - p_5, \quad (7)$$

5-го семейства

$$W = n, \quad (8)$$

т. е. механизмы 5-го семейства представляют собой пары 5-го класса.

Все эти структурные формулы можно объединить одной формулой В. В. Добровольского:

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=5}^{k=m+1} (k - m)p_k, \quad (9)$$

где m — количество общих связей, $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

k — номер класса кинематической пары, $k = 5, 4, 3, 2, 1$;

n — число подвижных звеньев механизма.

§ 3. Плоские механизмы

К плоским механизмам относятся такие механизмы, звенья которых перемещаются либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях. Такое ограничение в движении звеньев плоских механизмов определяет наличие трех общих условий связи. Действительно, если предположить, что звенья плоского механизма перемещаются в плоскости xOz (рис. 5), то этим исключаются вращательные движения вокруг осей x и z и поступательное вдоль оси y . Таким образом, плоские механизмы относятся в общем случае к механизмам 3-го семейства и для них справедлива формула (6):

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Эта формула была предложена академиком П. Л. Чебышевым в 1869 году и носит его имя.

Иногда это выражение записывается в виде

$$W = 3n - 2p_n - p_b, \quad (10)$$

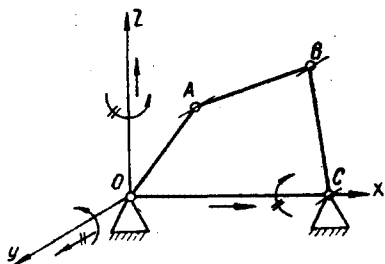


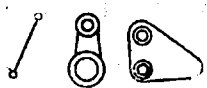
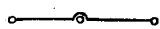


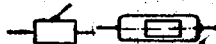
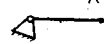
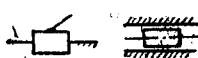

Рис. 5.

где p_n — низшие кинематические пары, у которых элементом является поверхность или сочетание поверхностей (обычно это пары 5-го класса);

p_4 — высшие кинематические пары, у которых элементом является линия или точка (обычно это пары 4-го класса).

Таблица 2

Условные обозначения звеньев и кинематических пар плоских механизмов

Наименование	Условное обозначение
Звено, входящее в две вращательные пары 5-го класса	Конструктивная форма 
Звено, входящее в три вращательные пары 5-го класса, лежащие на одной прямой	
Звено, входящее в три вращательные пары 5-го класса, не лежащие на одной прямой	
Два звена, входящие во вращательную пару 5-го класса	
Два звена, входящие в поступательную пару 5-го класса	
Звено и стойка, входящие во вращательную пару 5-го класса	
Звено и стойка, входящие в поступательную пару 5-го класса	
Пара 4-го класса	

В табл. 2 показаны основные условные обозначения звеньев и кинематических пар в плоских механизмах. Следует обратить внимание на то, что условное обозначение звена не определяет его конструктивной формы, т. е. конструктивная форма звена может быть различной, а условное его обозначение одним и тем же.

Замена в плоских механизмах пар 4-го класса (высших) кинематическими цепями, содержащими пары 5-го класса (низшие). В общем случае, плоский механизм состоит из звеньев, входящих в пары 4-го и 5-го классов. В дальнейшем будет показано, что многие методы решения самых разнообразных задач применимы для плоских механизмов, которые содержат звенья, входящие только в пары 5-го класса. Чтобы применить эти методы для механизмов, содержащих и пары 4-го класса, необходимо пары 4-го класса на чертеже заменить кинематической цепью, в которой имеются только пары 5-го класса. Таким образом, любой плоский механизм на чертеже может быть представлен после замены как механизм, состоящий из звеньев, входящих только в пары 5-го класса. Не следует думать, что пары 4-го класса чем-то не удовлетворяют при эксплуатации машины. Они так же широко распространены в машинах, как и пары 5-го класса. Например, все виды зубчатого зацепления представляют собой пары 4-го класса.

Пусть имеется механизм с числом степеней подвижности W_0 . В этом механизме требуется заменить одну пару 4-го класса кинематической цепью, содержащей только пары 5-го класса. Если можно заменить одну пару 4-го класса, то таким же путем можно заменить и вторую, и третью, и остальные пары 4-го класса, имеющиеся в механизме. Замену можно произвести на следующих условиях:

а) число степеней подвижности механизма после замены не меняется;

б) относительное движение звеньев механизма сохраняется.

Если убрать из механизма одну пару 4-го класса, то число степеней подвижности будет $W_0 + 1$, так как одна пара 4-го класса лишает плоский механизм одной степени подвижности. В этом случае число степеней подвижности увеличивается на единицу. Если вместо этой пары 4-го класса к механизму добавить кинематическую цепь, которая состоит из звеньев, входящих в пары 5-го класса, то число степеней подвижности механизма будет $W_0 + 1 + 3n - 2p_5$, так как в добавленной цепи оно равно $3n - 2p_5$. На основании первого условия замены имеем:

$$W_0 + 1 + 3n - 2p_5 = W_0.$$

Отсюда соотношение между числом звеньев и пар 5-го класса в заменяющей цепи

$$n = \frac{2p_5 - 1}{3}.$$

Простейшая кинематическая цепь будет представлять собой одно звено ($n=1$), входящее в две пары 5-го класса ($p_5=2$), так как n и p_5 — целые числа. Такое звено может входить как во вращательные, так и в поступательные пары 5-го класса (рис. 6). Таким образом, одну пару 4-го класса можно заменить одним звеном, входящим в две пары 5-го класса.

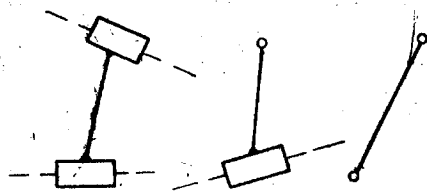


Рис. 6.

В механизме (рис. 7) заменим пару 4-го класса, профилями звеньев которой будут две окружности с центрами в точках A и B . При перемещении звена 1 на угол φ_1 звено 2 повернется на угол φ_2 , при этом расстояние между центрами A и B останется неизменным: r_1+r_2 . Пару 4-го класса заменим звеном $AB=r_1+r_2$, входящим в две вращательные пары 5-го класса A и B (рис. 8). Относительное движение звеньев 1 и 2 будет таким же, как и в первоначальном механизме, т. е. перемещение звена 1 на угол φ_1 также

будет определять поворот звена 2 на угол φ_2 . Число степеней подвижности в этом механизме будет равно первоначальному, так как одна пара 4-го класса заменена звеном, входящим в две пары 5-го класса, т. е. такой кинематической цепью, которая, как это было доказано, обеспечивает неизменность числа степеней подвижности. Действительно, для первоначального механизма

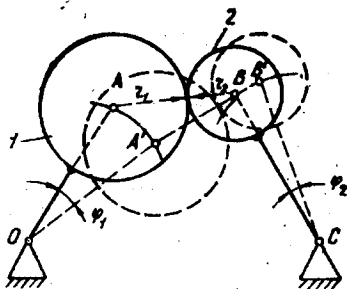


Рис. 7.

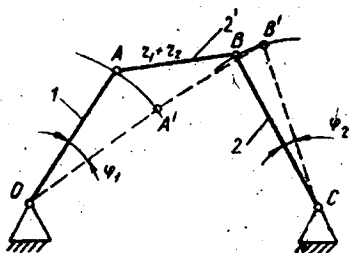


Рис. 8.

будет определять поворот звена 2 на угол φ_2 . Число степеней подвижности в этом механизме будет равно первоначальному, так как одна пара 4-го класса заменена звеном, входящим в две пары 5-го класса, т. е. такой кинематической цепью, которая, как это было доказано, обеспечивает неизменность числа степеней подвижности. Действительно, для первоначального механизма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1,$$

для механизма после замены

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

После замены механизм (см. рис. 8) уже будет другим, так как добавилось звено 2' и изменились кинематические пары. Однако звенья 1 и 2 остались, поэтому какая бы ни была поставлена за-

дача для первоначального механизма, всегда в решение войдет все, что касается этих звеньев.

Если профили звеньев пары 4-го класса представляют собой кривые переменной кривизны (рис. 9, а), то в рассматриваемый момент отыскиваем центры кривизны этих кривых A и B , располагающиеся на нормали $N-N$. Радиусами кривизны ρ_1 и ρ_2 проводим две окружности. Этот случай уже рассмотрен. Заменяющий механизм (рис. 9, б) является мгновенным, так как через некоторый промежуток времени относительное расположение звеньев будет уже иным и длины звеньев в заменяющем механизме также будут другими.

В том случае, когда профилем одного из звеньев пары 4-го класса будет точка (рис. 10, а, точка B), в заменяющем механизме одна из пар, в которую входит заменяющее звено, будет совпадать с этой точкой (рис. 10, б). Если же профиль одного из звеньев пары 4-го класса — прямая (рис. 11, а), то центр кривизны будет располагаться в бесконечности. Относительное вращательное движение с центром, находящимся в бесконечности, можно представить как поступательное. Звено, заменяющее пару 4-го класса, будет в этом случае входить в поступательную и вращательную пары (рис. 11, б).

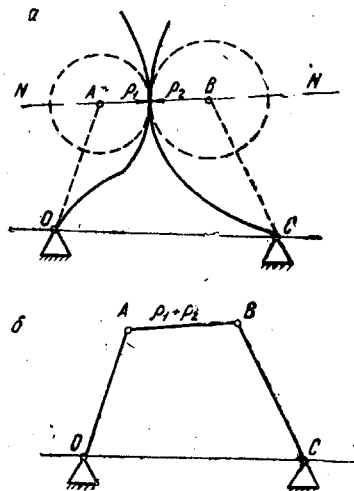


Рис. 9.

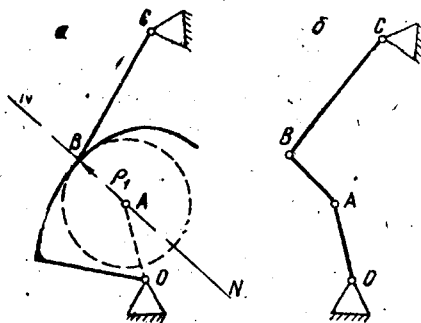


Рис. 10.

Классификация плоских механизмов. Удобная классификация плоских механизмов была разработана профессором Л. В. Ассуром и опубликована в 1916 году. Дальнейшее развитие она получила в трудах академика И. И. Артоболевского.

Механизмом 1-го класса называется звено и стойка, входящие во вращательную пару 5-го класса (рис. 12). Степень подвижности такого механизма $W=1$ и определяется заданным законом движения $\omega=f(\varphi)$ ведущего звена 1.

Группой (группой Ассура) называется такая простейшая незамкнутая кинематическая цепь, которая после присоединения

крайними свободными элементами кинематических пар к стойке будет обладать нулевой степенью подвижности. Полагаем, что группа состоит из звеньев, входящих только в пары 5-го класса. (Пары 4-го класса можно не рассматривать, так как они могут быть за-

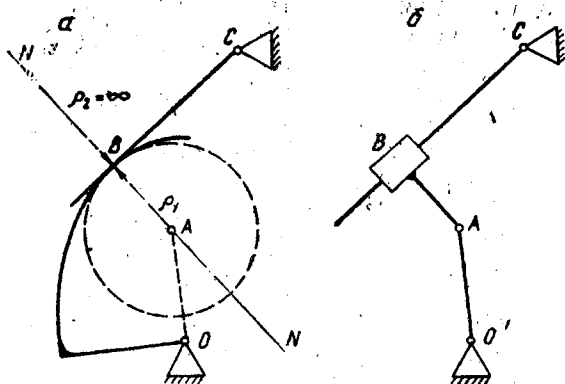


Рис. 11.

менены.) Следовательно, для группы имеем $W=3n-2p_5=0$, откуда $n=\frac{2}{3}p_5$.

Так как количество пар и звеньев может быть только целым, численные значения n и p_5 в группе могут быть

p_5	3	6	9	...
n	2	4	6	...

На рис. 13 показана простейшая группа, состоящая из двух звеньев и трех вращательных пар 5-го класса.

Более сложные группы приведены на рис. 14. Каждая группа включает в себя контуры различных классов (рис. 15): контур 2-го

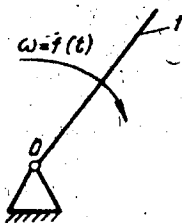


Рис. 12.

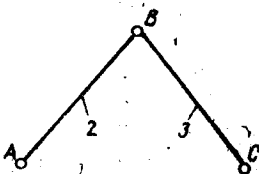


Рис. 13.

класса (рис. 15, а), 3-го класса (рис. 15, б), 4-го класса (рис. 15, в). Класс контура определяется числом кинематических пар, в которые входят звенья контура. Класс группы определяется классом наивысшего по классу контура, входящего в группу.

На рис. 16 показаны группы различных классов: группа 2-го класса 2-го порядка (рис. 16, а), 3-го класса 3-го порядка (рис. 16, б), 4-го класса 2-го порядка (рис. 16, в).

Порядок группы определяется числом крайних свободных элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к механизму.

Плоские механизмы образуются путем последовательного присоединения групп к одному (рис. 17, а) или нескольким механиз-

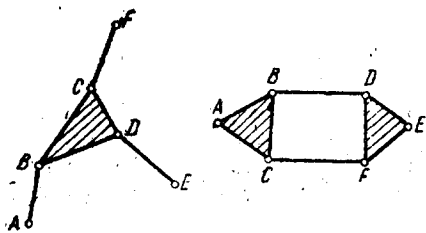


Рис. 14.

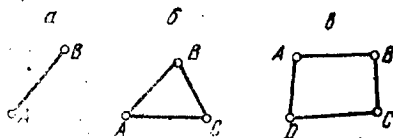


Рис. 15.

мам 1-го класса (рис. 17, б). При этом группа присоединяется к двум или более звеньям. После присоединения группа обладает нулевой степенью подвижности, поэтому число степеней подвижности

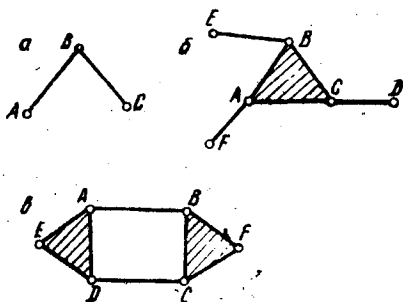


Рис. 16.

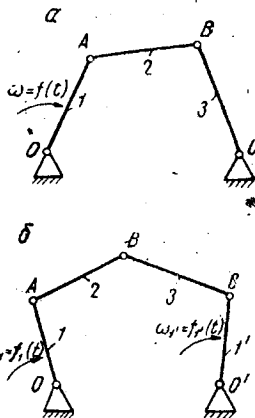


Рис. 17.

механизма всегда будет равно числу механизмов 1-го класса, т. е. числу ведущих звеньев.

Каждая последующая присоединяемая к механизму группа может присоединяться к любой точке звена. В этом случае после присоединения на звене будут уже не две кинематические пары, как, например, у звена AB (рис. 18), а три — A, B и D, но это не означает, что при такой последовательности присоединения групп к ве-

дущему звену OA и стойке получается контур 3-го класса. Здесь надо иметь в виду, что пара D образовалась в результате присоединения последующей группы.

В плоский механизм могут входить группы различных классов. Класс механизма определяется классом высшей по классу группы, входящей в механизм.

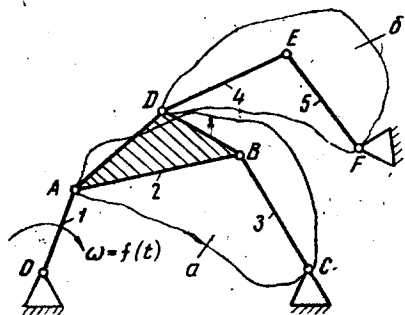


Рис. 18.

при ведущем звене OA состоит из двух групп: группы 3-го класса (рис. 19, *a*) и группы 2-го класса (рис. 19, *б*). При ведущем же звене CF этот механизм уже будет состоять из трех групп 2-го класса.

Этим свойством можно пользоваться при проведении кинематических расчетов.

При последовательном отсоединении групп от механизма число степеней подвижности механизма без отсоединенной группы должно быть неизменным, так как степень подвижности присоединенной группы равна нулю.

Группы 2-го класса в зависимости от количества и взаимного рас-

положения вращательных и поступательных пар 5-го класса образуют 5 видов (рис. 20). Шестого вида, включающего только одни поступательные пары, не может быть. Действительно, если представить себе группу 2-го класса, состоящую из звеньев, входящих только в поступательные пары 5-го класса, то после присоединения такой кинематической цепи к стойке (рис. 21) число степеней подвижности не будет равно нулю, так как при некотором перемещении звена I будет перемещаться и звено 2. Следовательно, данная кинематическая цепь будет не группой, а механизмом. Это не явля-

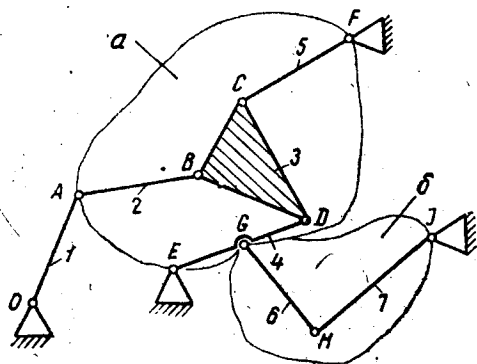


Рис. 19.

еся каким-либо исключением из ранее принятых положений и объясняется тем, что наличие только поступательных пар приводит к дополнительному общему условию связи — невозможности вращения вокруг оси y (см. рис. 5). Таким образом, здесь уже 4 общих условия связи, поэтому

$$W = 2n - p_5 = 2 \cdot 3 - 3 = 1.$$

В группах 3-го и других классов также могут быть как вращательные, так и поступательные кинематические пары 5-го класса. Однако различать виды этих групп не имеет особого смысла вследствие чрезвычайно большого разнообразия сочетаний пар в этих группах.

Пользуясь рассмотренной классификацией, можно путем различного сочетания групп и механизмов 1-го класса получать простые и сложные механизмы и вместе с тем контролировать возможность относительного движения звеньев в самых сложных кинематических схемах.

Кроме того, данная классификация имеет еще одно чрезвычайно важное достоинство, которое заключается в том, что групп очень мало (групп 2-го класса всего 5), а различных механизмов тысячи. Поэтому, расчленяя механизм на группы, достаточно уметь решать задачи ТММ для групп, число которых ограничено. Этим определяется возможность решения задач для всего многообразия плоских механизмов. В дальнейшем многие задачи ТММ будут решаться не для каждого конкретного механизма, а для различных групп.

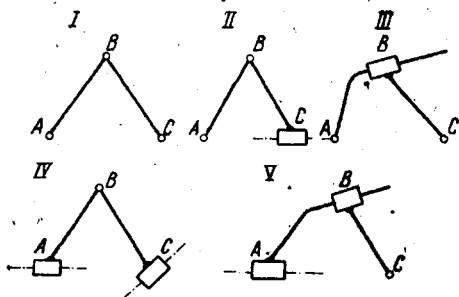


Рис. 20.

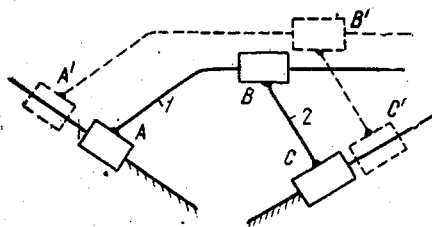


Рис. 21.

которых ограничено. Этим определяется возможность решения задач для всего многообразия плоских механизмов. В дальнейшем многие задачи ТММ будут решаться не для каждого конкретного механизма, а для различных групп.

§ 4. Лишние степени подвижности и пассивные условия связей

На рис. 22, а показан четырехзвенный механизм, состоящий из трех подвижных звеньев, входящих в три пары 5-го класса и одну пару 4-го класса. Очевидно, что число степеней подвижности у этого механизма равно единице, т. е. движение звена OA определяет движение всех остальных звеньев. Вместе с тем, если определить W этого механизма по формуле П. Л. Чебышева, то

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2,$$

т, е. фактическое число степеней подвижности не всегда соответствует расчетному. Объясняется это наличием в механизме так называемых *лишних степеней подвижности*.

В рассматриваемом механизме звено 3 может пробуксовывать по направляющей стойки и создавать лишнюю степень подвижности,

которая не определяет относительного движения других звеньев. Поэтому, прежде чем определять по формуле W , необходимо устранить лишние степени подвижности. В механизме, изображенном на рис. 22, а, это можно сделать путем изменения элемента пары звена 3 так, как это показано на рис. 22, б. В этом случае пара 4-го класса превращается в поступательную пару 5-го класса, а $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$, т. е. соответствует действительному.

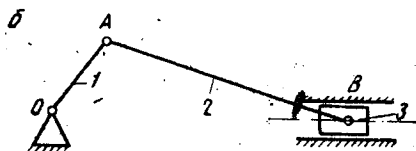
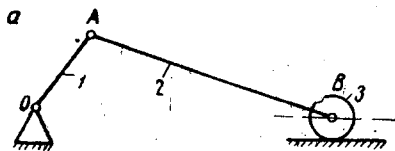


Рис. 22.

В механизме, приведенном на рис. 23, длины противолежащих звеньев одинаковы. В этом механизме $W = 1$, так как движение звена OA определяет движение всех остальных звеньев. По формуле же $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$.

В рассматриваемом механизме пары D и E с входящим в них звеном 4 образуют пассивные условия связи, т. е. такие связи, которые не ограничивают движения остальных звеньев. Действительно, если убрать звено 4 и пары D и E (рис. 23, б), то движение остальных звеньев по-прежнему будет определяться движением звена OA . В этом случае расчетное $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$, т. е. соответствует действительному. Следовательно, прежде чем рассчитывать W , необходимо найти и устранить пассивные условия связи.

Общих методов отыскания лишних степеней подвижности и пассивных условий связи нет, поэтому приходится полагаться на личный опыт, приобретаемый по мере изучения курса ТММ.

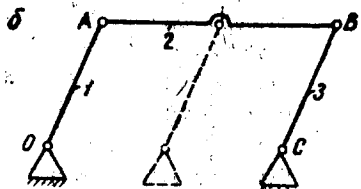
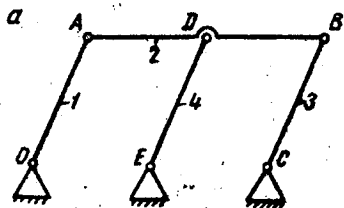


Рис. 23.

Глава II. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В задачи кинематического анализа входят определение положений звеньев; нахождение скоростей точек и угловых скоростей звеньев; определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев. Решение этих задач в зависимости от их условий и необходимой точности может быть получено тремя методами — при помощи построения планов скоростей и ускорений, методом кинематических диаграмм и аналитическим путем.

§ 5. Построение планов скоростей и ускорений

При построении планов скоростей и ускорений для различных механизмов удобно пользоваться результатами решения некоторых задач.

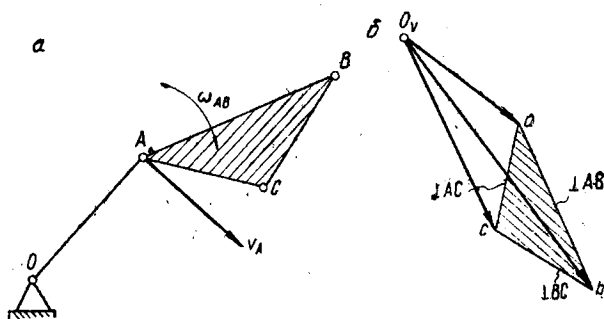


Рис. 24.

Задача 1. Скорости точек жесткого звена, входящего во вращательную пару 5-го класса с другим звеном. Принцип подобия в плане скоростей.

Дано: два звена, входящих во вращательную пару 5-го класса (рис. 24, а), скорость \vec{v}_A точки А и угловая скорость ω_{AB} звена ABC. Требуется определить скорости \vec{v}_B и \vec{v}_C точек В и С.

Рассматривая движение точки В совместно с точкой А (переносное движение) и относительно нее, определяем скорость точки В

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (11)$$

где $v_{BA} = \omega_{AB}(AB)$ и $v_{BA} \perp AB$.

Рассматривая движение точки C совместно с точкой A и относительно нее, определяем скорость точки C

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}, \quad (12)$$

где $v_{CA} = \omega_{AB}(AC)$ и $\bar{v}_{CA} \perp AC$.

Построим векторы \bar{v}_B и \bar{v}_C . Примем масштаб построения плана скоростей k_v (масштабный коэффициент)

$$k_v = \frac{\text{истинное значение скорости, м/сек}}{\text{длина отрезка на чертеже, мм}}$$

Выберем точку O_v — полюс плана скоростей и построим в масштабе k_v уравнение (11), принимая точку O_v за начало построения. Начало вектора \bar{v}_A будет в точке O_v , а конец обозначим через a (рис. 24, б). Затем из точки a проводим отрезок — вектор $\bar{v}_{BA} \perp AB$, конец которого обозначим через b . Суммарный вектор \bar{v}_B пойдет из начала построения — точки O_v , а конец его будет находиться в точке b .

Строим уравнение (12). Вектор \bar{v}_A уже построен, поэтому к его концу достаточно пристроить вектор $\bar{v}_{CA} \perp AC$, конец которого обозначим буквой c .

Скорость \bar{v}_C точки C можно построить несколько иначе, рассматривая движение точки C совместно с точкой B и относительно нее, тогда

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}, \quad (13)$$

где $v_{CB} = \omega_{AB}(BC)$ и $\bar{v}_{CB} \perp BC$ (см. рис. 24, б).

Абсолютная скорость точки в плане скоростей является вектором, имеющим начало в полюсе и конец в точке, скорость которой определяется (например, скорость \bar{v}_B точки B на плане скоростей будет вектор $O_v b$).

Относительные скорости в плане скоростей читаются обратно наименованию скорости (например, скорость \bar{v}_{BA} читается ab , $\bar{v}_{CA} — ac$ и т. п.). Этим определяется направление скорости. Вектор скорости \bar{v}_B точки B будет направлен слева направо вниз; а вектор \bar{v}_{BA} — от точки a к точке b . Величины скоростей будут: $v_B = k_v(O_v b)$ и $v_{BA} = k_v(ab)$.

В результате построения плана скоростей получен $\triangle abc$, который подобен $\triangle ABC$, как треугольник с взаимно перпендикулярными сторонами. Это позволяет установить принцип подобия в плане скоростей.

В плане скоростей векторы относительных скоростей точек жесткого звена образуют фигуру, подобную звену, повернутую на угол 90° в сторону угловой скорости звена.

Пользуясь принципом подобия, достаточно на плане скоростей построить скорости только двух точек жесткого звена (например, точек A и B на рис. 24, а). Скорость же любой третьей точки определится путем построения на отрезке относительной скорости (отрезок ab на рис. 24, б) подобной фигуры.

Задача 2. Скорости точек звена, входящего в поступательную пару 5-го класса с другим звеном (рис. 25).

Дано: угловая скорость ω_{OA} звена OA и относительная скорость звена AB , направленная вдоль звена OA . Обозначим направляющую — звено OA — через xx , а скорость относительного движения — через \bar{v}_{AA_x} , точка A принадлежит звену AB , а точка A_x — направляющей xx и совпадает в рассматриваемый момент времени с точкой A .

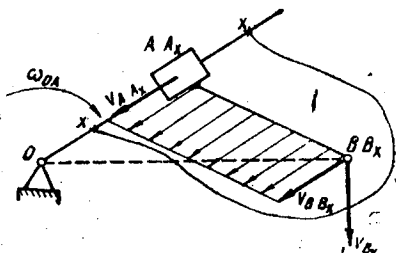


Рис. 25.

Для определения скорости точки B направляющую xx расширим в плоскости чертежа и на расширенной ее части пометим точку B_x , которая совпадает с точкой B . Таким образом, точки B и B_x хотя и совпадают в данный момент времени, но принадлежат различным звеньям. Рассматривая движение точки B совместно с точкой B_x и относительно нее, будем иметь:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_x} + \bar{v}_{BB_x}. \quad (14)$$

Здесь \bar{v}_{B_x} (скорость точки B_x) известна, т. е. она непосредственно может быть определена из заданных условий $v_{B_x} = \omega_{OA} (OB_x)$ или, что то же самое, $v_{B_x} = \omega_{xx} (OB)$, так как $\omega_{xx} = \omega_{OA}$. Звено AB относительно направляющей xx движется поступательно, поэтому $\bar{v}_{BB_x} = \bar{v}_{AA_x}$, так как в поступательном движении скорости всех точек одинаковы. Скорость \bar{v}_B точки B может быть определена путем построения суммы двух векторов в соответствии с уравнением (14).

В дальнейшем будем предполагать, что если известна угловая скорость направляющей, то известна и скорость любой ее точки, т. е. скорость точки направляющей может быть определена из заданных условий, как это было сделано для точки B_x .

Задача 3. Ускорения точек жесткого звена, входящего во вращательную пару 5-го класса с другим звеном. Принцип подобия в

плане ускорений. При решении задач на ускорение будем полагать, что все скорости известны.

Полагаем известным ускорение \bar{w}_A точки A (рис. 26) и угловое ускорение ϵ_{AB} звена ABC . Будем определять ускорение \bar{w}_B и \bar{w}_C . Ускорение точки B получим из уравнения

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA} \quad (15)$$

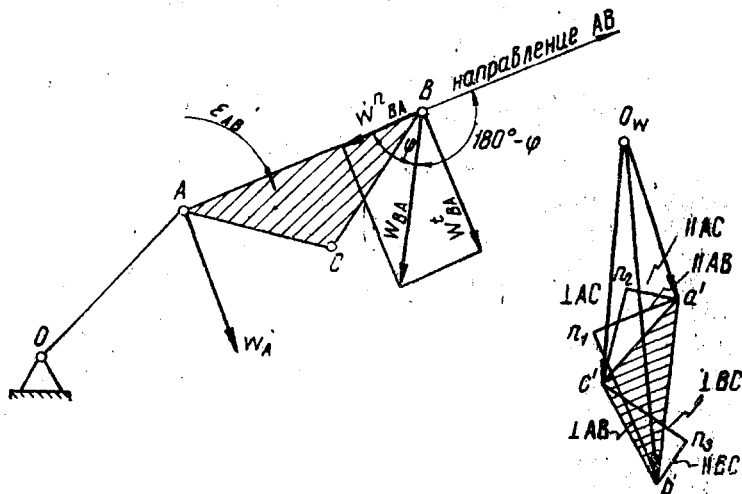


Рис. 26.

Полное относительное ускорение \bar{w}_{BA} точки B относительно точки A представим в виде суммы

$$\bar{w}_{BA} = \bar{w}_{BA}^n + \bar{w}_{BA}^t \quad (16)$$

где $w_{BA}^n = \omega_{BA}^2 (AB)$ — нормальное ускорение точки B относительно точки A ;

$\bar{w}_{BA}^n \parallel \bar{AB}$ — направлено от точки B к точке A ;

$w_{BA}^t = \epsilon_{AB} (AB)$ — касательное ускорение;

$\bar{w}_{BA}^t \perp AB$ — направлено в сторону углового ускорения ϵ_{AB} .

Подставляя значение \bar{w}_{BA} по выражению (16) в уравнение (15), получим

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}^n + \bar{w}_{BA}^t \quad (17)$$

Построим уравнение (17). Примем масштаб построения k_w — масштаб плана ускорений

$$k_w = \frac{\text{истинное значение ускорения, м/сек}^2}{\text{длина отрезка на чертеже, мм}}$$

Выберем точку O_w — полюс плана ускорений. В масштабе k_w от точки O_w строим правую часть уравнения — сумму ускорений. Ускорение точки B в масштабе построения определится замыкающим вектором $O_w b'$. Ускорение точки C может быть определено путем построения на плане ускорений уравнения

$$\bar{w}_C = \bar{w}_A + \bar{w}_{CA}^n + \bar{w}_{CA}^t, \quad (18)$$

где.

$$\bar{w}_{CA}^n + \bar{w}_{CA}^t = \bar{w}_{CA}; \quad (19)$$

$w_{CA}^n = \omega_{AB}^2 (AC)$ — нормальное ускорение точки C относительно точки A ; $\bar{w}_{CA}^n \parallel \overrightarrow{AC}$;

\bar{w}_{CA}^t — касательное ускорение точки C относительно точки A ;

$$w_{CA}^t = \varepsilon_{AB} (AC); \quad \bar{w}_{CA}^t \perp AC.$$

Ускорение точки C можно определить несколько иначе, если рассмотреть движение точки C совместно с точкой B и относительно нее. В этом случае уравнение для определения ускорения точки C :

$$\bar{w}_C = \bar{w}_B + \bar{w}_{CB}^n + \bar{w}_{CB}^t, \quad (20)$$

где

$$w_{CB}^n = \omega_{AB}^2 (BC) \parallel \overrightarrow{BC}; \quad w_{CB}^t = \varepsilon_{AB} (BC) \perp BC$$

и

$$\bar{w}_{CB}^n + \bar{w}_{CB}^t = \bar{w}_{CB}. \quad (21)$$

Значения полных относительных ускорений

$$\left. \begin{aligned} w_{BA} &= \sqrt{(w_{BA}^n)^2 + (w_{BA}^t)^2} = AB \sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}; \\ w_{CA} &= \sqrt{(w_{CA}^n)^2 + (w_{CA}^t)^2} = AC \sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}; \\ w_{CB} &= \sqrt{(w_{CB}^n)^2 + (w_{CB}^t)^2} = BC \sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Тангенс угла φ , определяющего направление полного относительного ускорения (см. рис. 26), будет равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w_{BA}^t}{w_{BA}^n} = \frac{\varepsilon_{AB} (AB)}{\omega_{AB}^2 (AB)} = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2}, \quad (23)$$

т. е. тангенс угла φ не зависит от того, какое относительное ускорение рассматривается, и одинаков для всех ускорений.

Выражения (22) и (23) показывают, что полные относительные ускорения точек жесткого звена ABC пропорциональны длинам звеньев жесткого звена и повернуты на один и тот же угол. Сле-

довательно, в плане ускорений $\triangle a'b'c' \sim \triangle ABC$. Это позволяет установить принцип подобия в плане ускорений.

В плане ускорений полные относительные ускорения точек жесткого звена образуют фигуру, подобную звену, повернутую относительно него на угол $180^\circ - \varphi$ в сторону его углового ускорения (см. рис. 26). Пользуясь принципом подобия, достаточно определить ускорения двух точек жесткого звена. Ускорения других

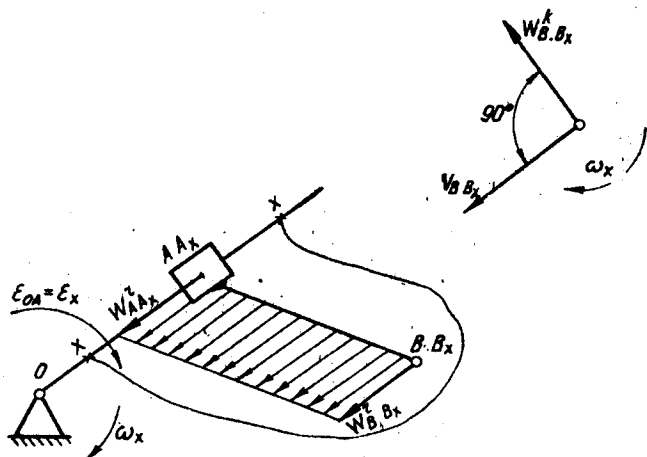


Рис. 27.

точек звена могут быть получены путем построения подобной фигуры на отрезке прямой между этими двумя точками.

Задача 4. Ускорения точек звена, входящего в поступательную пару 5-го класса с другим звеном (рис. 27).

Полагаем заданным угловое ускорение ε_{OA} звена OA и относительное ускорение звена AB вдоль звена OA . Как и в задаче 2, покажем точки A_x и B_x . Обозначим направляющую через xx , а относительное ускорение через $w_{AA_x}^r$.

Ускорение точки B выразится зависимостью $\bar{w}_B = \bar{w}_{B_x} + \bar{w}_{BB_x}$, но $\bar{w}_{BB_x} = \bar{w}_{BB_x}^k + \bar{w}_{BB_x}^r$, где $\bar{w}_{BB_x}^k$ — кориолисово ускорение, так как переносное движение будет вращательным с угловой скоростью ω_{OA} ; $\bar{w}_{BB_x}^r$ — относительное ускорение в поступательном движении вдоль направляющей xx . Тогда

$$\bar{w}_B = \bar{w}_{B_x} + \bar{w}_{BB_x}^k + \bar{w}_{BB_x}^r, \quad (24)$$

где \bar{w}_{B_x} — ускорение точки B_x полагаем известным, так как его можно рассчитать по заданным параметрам.

Действительно,

$$\omega_{B_x} = \sqrt{(\omega_{B_x}^n)^2 + (\omega_{B_x}^t)^2},$$

где

$$\omega_{B_x}^n = \omega_x^2 (OB_x) \text{ и } \omega_{B_x}^t = \varepsilon_x (OB_x).$$

Поэтому в дальнейшем будем полагать, что если известно угловое ускорение направляющей, то известно и ускорение любой точки направляющей. $\bar{\omega}_{BB_x}^k = \bar{\omega}_{AA_x}^k$, так как относительное ускорение поступательное, а при поступательном движении ускорения всех точек одинаковы. Величина $\omega_{BB_x}^k = 2\omega_x v_{BB_x}$. Направление $\bar{\omega}_{BB_x}^k$ определится по известному из курса теоретической механики правилу (см. рис. 27), в соответствии с которым вектор относительной скорости \bar{v}_{BB_x} поворачивается на угол 90° в сторону переносной угловой скорости ω_x . Полученное направление будет направлением вектора $\bar{\omega}_{BB_x}^k$.

Ускорение точки A

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_{A_x} + \bar{\omega}_{AA_x}^k + \bar{\omega}_{AA_x}^r. \quad (25)$$

Здесь $\omega_{AA_x}^k = 2\omega_x v_{AA_x}$, но $\bar{v}_{AA_x} = \bar{v}_{BB_x}$, поэтому $\bar{\omega}_{AA_x}^k = 2\omega_x v_{BB_x} = \bar{\omega}_{BB_x}^k$, т. е. в плоских механизмах кориолисовы ускорения точек звена одинаковы в относительном движении.

Как уже было показано, все плоские механизмы образуются из групп Ассур, поэтому в дальнейшем будем рассматривать построение планов скоростей и ускорений для групп, ограниченное количество которых даст возможность строить планы скоростей и ускорений для самых разнообразных плоских механизмов. При построении планов скоростей и ускорений для групп Ассур будем пользоваться результатами четырех задач. Новой будет здесь только последовательность решения и построения.

§ 6. Планы скоростей и ускорений для групп 2-го класса

Группа 1-го вида

План скоростей. Дано: \bar{v}_A и \bar{v}_C . Определить \bar{v}_B , \bar{v}_D , \bar{v}_E , ω_{AB} и ω_{BC} (рис. 28). Здесь, как и в дальнейшем, следует обратить внимание на постановку задачи. Рассматриваемая группа является группой 2-го порядка, т. е. она присоединяется к механизму двумя крайними элементами кинематических пар A и C , поэтому известными будут кинематические параметры именно этих точек: \bar{v}_A и \bar{v}_C .

Итак имеем:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{v}_{BC}$$

Здесь $\vec{v}_{BA} \perp AB$ и $\vec{v}_{BC} \perp BC$. Строим эти уравнения на плане скоростей (см. рис. 28). В масштабе k_v от точки O_v откладываем отрезок — вектор \vec{v}_A , конец которого обозначим буквой a и через эту точку проводим прямую $\perp AB$ — направление вектора \vec{v}_{BA} . Затем

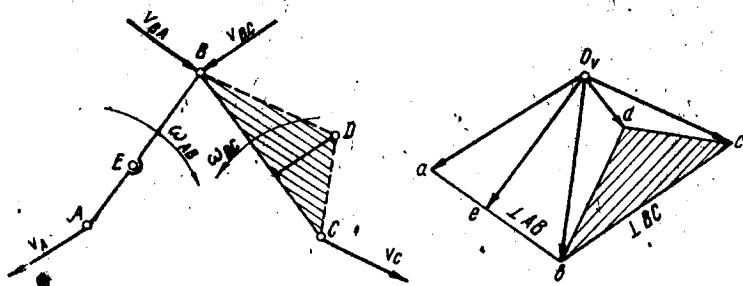


Рис. 28.

от точки O_v откладываем отрезок — вектор \vec{v}_C , конец которого обозначаем буквой c , и через эту точку проводим прямую $\perp BC$ — направление вектора \vec{v}_{BC} , пересечение прямых $\perp AB$ и $\perp BC$ даст точку b — конец вектора скорости \vec{v}_B . Соединив точку b с полюсом O_v , получим вектор \vec{v}_B . Скорость точки D определяем, построив на отрезке bc $\triangle bdc \sim \triangle BDC$. Полученную точку d соединяем с полюсом O_v . Скорость точки E получим, построив на отрезке ab отрезок $ae \sim \triangle AEB$, точку e соединим прямой с точкой O_v . Отрезок $O_v e$ будет представлять скорость точки E в масштабе k_v .

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{(ab) k_v}{AB}$. Перенесем относительную скорость \vec{v}_{BA} (на плане скоростей отрезок ab) в точку B . Направление этой скорости позволяет установить направление ω_{AB} .

Угловая скорость звена BC $\omega_{BC} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{(cb) k_v}{BC}$. Направление ω_{BC} определяется аналогично предыдущему.

План ускорений. Дано: \vec{w}_A и \vec{w}_C . Определить \vec{w}_B , \vec{w}_D , \vec{w}_E , ε_{AB} , ε_{BC} (рис. 29).

Для определения ускорений точки B составляем уравнения:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^n + \vec{w}_{BA}^t \quad (26)$$

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_C + \bar{\omega}_{BC}^n + \bar{\omega}_{BC}^t \quad (27)$$

Здесь $\omega_{BA}^n = \omega_{AB}^2 (AB) \parallel \bar{AB}$; $\bar{\omega}_{BA}^t \perp AB$; $\omega_{BC}^n = \omega_{BC}^2 (BC) \parallel \bar{BC}$,
 $\bar{\omega}_{BC}^t \perp BC$.

На плане ускорений (рис. 29) строим уравнение (26). От точки O_w — полюса плана ускорений в масштабе k_w откладываем отрезок

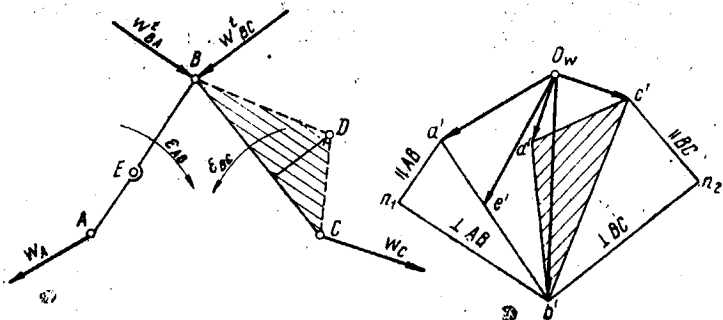


Рис. 29.

зона $O_w a'$, равный $\bar{\omega}_A$. Затем строим отрезок $a' n_1$, изображающий вектор $\bar{\omega}_{BA}^t$. Далее из точки n_1 проводим прямую $\perp AB$ — направление вектора $\bar{\omega}_{BA}^n$.

Строим также уравнение (27). От точки O_w откладываем отрезок $O_w c'$, равный ω_c , и отрезок $c' n_2$ — ускорение $\bar{\omega}_{BC}^t$. Затем из точки n_2 проводим прямую $\perp BC$ — направление $\bar{\omega}_{BC}^n$. Точка b' пересечения прямых, направленных $\perp AB$ и $\perp BC$, является концом вектора ускорения $\bar{\omega}_B$. Соединив точки b' и O_w , получим вектор $O_w b'$, ускорение точки B в масштабе k_w . Соединим прямыми точку b' с точками a' и c' . $\bar{\omega}_{BA}$ и $\bar{\omega}_{BC}$ — полные относительные ускорения в масштабе k_w точки B относительно точек A и C определяются соответственно отрезками $a'b'$ и $c'b'$.

Угловое ускорение звена AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\omega_{BA}^t}{AB} = \frac{(n_1 b') k_w}{AB}$$

Для определения направления углового ускорения ε_{AB} перенесем $\bar{\omega}_{BA}^t$ в точку B группы, угловое ускорение будет направлено в сторону $\bar{\omega}_{BA}^t$. Угловое ускорение звена BC

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\omega_{BC}^t}{BC} = \frac{(n_2 b') k_w}{BC}$$

Направление v_{BC} определяется аналогично предыдущему. Ускорение точки D получим, построив на отрезке $b'd'$ $\triangle b'd'e' \sim \triangle BDC$ и соединив полученную таким образом точку d' с полюсом O_ω . Ускорение точки E определим, построив на отрезке $a'b'$ отрезок $a'e'b' \sim$ отрезку AEB .

Группа 2-го вида

План скоростей. Дано: \bar{v}_A и ω_x . Определить \bar{v}_B и \bar{v}_D (рис. 30). Здесь уже не ставится задача определить ω_{AB} и v_C , так как подобная задача уже решалась для группы 1-го вида. Угловая ско-

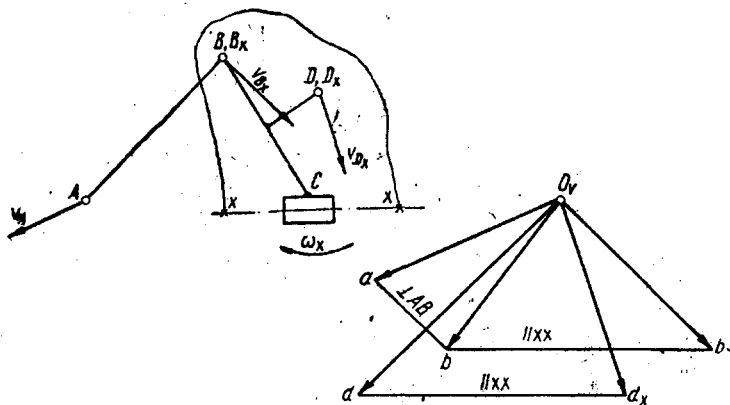


Рис. 30.

рость $\omega_{BC} = \omega_{xx}$, так как звено BC с направляющей xx образует поступательную пару и угловая скорость их будет одна и та же.

Направляющую xx расширим и обозначим точки B_x и D_x . Как уже ранее было установлено, скорости этих точек v_{B_x} и v_{D_x} будут известны (см. задачу 2).

Для определения скорости точки B составляем два уравнения:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (28)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_x} + \bar{v}_{BB_x} \quad (29)$$

Здесь $\bar{v}_{BA} \perp AB$ и $\bar{v}_{BB_x} \parallel xx$, так как относительное движение поступательное вдоль направляющей xx .

Строим уравнение (28). От точки O_v откладываем отрезок $O_v a$, равный вектору \bar{v}_A в масштабе k_v , затем из точки a проводим прямую $\perp AB$ — направление вектора \bar{v}_{BA} . Строим уравнение (29). Откладываем отрезок $O_v b_x$ — скорость v_{B_x} в масштабе k_v и из точки b_x

проводим направление \overline{v}_{Bx} параллельно xx . Точка b — конец вектора \overline{v}_B получится в результате пересечения прямой $\perp AB$ и прямой $\parallel xx$. Соединив точку b с точкой O_v , получим вектор $O_v b$ — скорость точки B в масштабе k_v .

Скорость точки D определим из уравнения

$$\overline{v}_D = \overline{v}_{Dx} + \overline{v}_{DDx} \quad (30)$$

Здесь $\overline{v}_{DDx} = \overline{v}_{BBx}$, так как звено BC относительно направляющей xx движется поступательно. При поступательном же движении

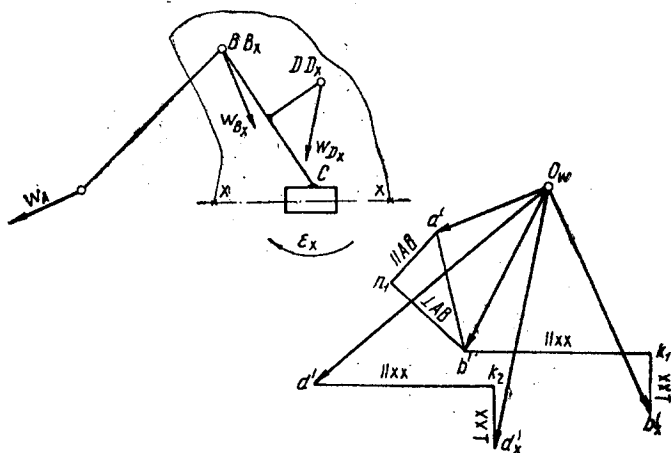


Рис. 31.

скорости всех точек одинаковы. Следовательно, на плане скоростей $\overline{d_x d} = \overline{b_x b}$ (рис. 30).

Строим уравнение (30). Скорость \overline{v}_{Dx} соответствует отрезку $O_v d_x$, а \overline{v}_{DDx} — отрезку $d_x d$. Замыкающий вектор \overline{v}_D — скорость точки D — пройдет из точки O_v в точку d .

План ускорений. Дано: \overline{w}_A и ϵ_x . Определить \overline{w}_B и \overline{w}_D (рис. 31).

На расширенной части направляющей xx наносим точки B_x и D_x . Ускорения этих точек известны, так как известна угловая скорость и ускорение направляющей (см. задачу 4). Для точки B имеем два уравнения

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^n + \overline{w}_{BA}^t \quad (31)$$

$$\overline{w}_B = \overline{w}_{Bx} + \overline{w}_{BBx}^n + \overline{w}_{BBx}^t \quad (32)$$

В этих уравнениях $\bar{\omega}_{BA} = \omega_{AB}^2 (AB) \parallel \bar{AB}$; $\bar{\omega}_{BA} \perp AB$; $\omega_{BB_x}^k = = 2\omega_{xx} v_{BB_x} \perp xx$; $\bar{\omega}_{BB_x}^k \parallel xx$ (см. задачу 4).

Строим уравнение (31). От точки O_w откладываем в масштабе k_w отрезок $O_w a'$ — ускорение $\bar{\omega}_A$, затем из точки a' откладываем отрезок $a' n_1$ — ускорение $\bar{\omega}_{BA}^k$, из точки n_1 проводим прямую $\perp AB$ — направление вектора $\bar{\omega}_{BA}^k$. Построим уравнение (32). Отложим отрезок $O_w b'_x$ — ускорение $\bar{\omega}_{B_x}^k$, затем $b'_x k_1$ — ускорение $\bar{\omega}_{BB_x}^k$. Направление этого ускорения определяем как и ранее (см. задачу 4). Из точки k_1 проводим прямую $\parallel xx$ — направление вектора $\bar{\omega}_{BB_x}^k$. Точку b' , пересечения этой прямой и прямой $\perp AB$, соединяем с полюсом O_w . Полученный отрезок $O_w b'$ будет $\bar{\omega}_B$ в масштабе k_w . Ускорение точки D определим построением уравнения

$$\bar{\omega}_D = \bar{\omega}_D + \bar{\omega}_{DD_x}^k + \bar{\omega}'_{DD_x} \quad (33)$$

В соответствии с задачей 4, $\bar{\omega}_{DD_x}^k = \bar{\omega}_{BB_x}^k$ и $\bar{\omega}'_{DD_x} = \bar{\omega}_{BB_x}^k$. Следовательно, в правой части уравнения (33) будет сумма известных векторов. Построим вектор $\bar{\omega}_D$. Из точки O_w последовательно откладываем отрезки $O_w d'_x$, $d'_x k_2 = b'_x k_1$ и $k_2 d' = k_1 b'$. Отрезок $O_w d'$ равен $\bar{\omega}_D$ в масштабе k_w .

Группа 3-го вида

План скоростей. Дано: \bar{v}_A и \bar{v}_C . Определить \bar{v}_D и $\omega_{AB} = \omega_{BC}$ (рис. 32).

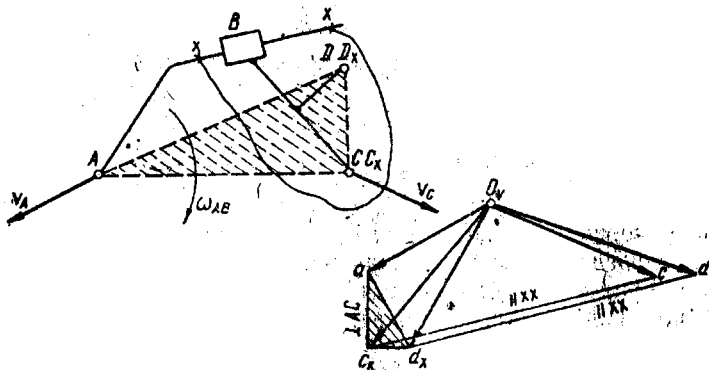


Рис. 32

Направляющую xx расширим и пометим точки C_x и D_x . Для решения поставленной задачи вначале определим скорости этих точек. Так как точки A , C_x и D_x принадлежат одному и тому же

звену xx , то эти точки в рассматриваемый момент образуют жестко звено AC_xD_x .

Для определения скорости точки C_x имеем уравнения

$$\bar{v}_{C_x} = \bar{v}_A + \bar{v}_{C_xA}, \quad (34)$$

$$\bar{v}_{C_x} = \bar{v}_C + \bar{v}_{C_xC}, \quad (35)$$

где $\bar{v}_{C_xA} \perp AC$ и $\bar{v}_{C_xC} \parallel xx$.

Строим уравнение (34). Из точки O_v откладываем отрезок O_va — вектор \bar{v}_A в масштабе k_v , из точки a проводим прямую $\perp AC$ направление \bar{v}_{C_xA} . Далее строим уравнение (35). Из точки O_v откладываем отрезок O_vc — скорость \bar{v}_C , из конца этого вектора — точки c проводим прямую $\parallel xx$ — направление \bar{v}_{C_xC} . Точка c_x пересечения этой прямой с прямой $\perp AC$, соединенная с точкой O_v , дает отрезок O_vc_x — искомый вектор \bar{v}_{C_x} в масштабе k_v . На отрезке ac_x построим $\triangle ac_xd_x \sim \triangle AC_xD_x$, точку d_x соединим с полюсом O_v . Отрезок O_vd_x — скорость точки D_x в масштабе k_v .

Скорость точки D определится из уравнения

$$\bar{v}_D = \bar{v}_{D_x} + \bar{v}_{DD_x}. \quad (36)$$

Здесь $\bar{v}_{DD_x} = \bar{v}_{CC_x}$ (см. задачу 2). Поэтому из точки d_x откладываем отрезок $d_xd = c_xc$, полученную точку d соединяем с точкой O_v . Отрезок O_vd — искомый вектор \bar{v}_D в масштабе k_v .

Угловая скорость $\omega_{AB} = \omega_{xx} = \frac{v_{C_xA}}{AC} = \frac{(ac_x)k_v}{AC}$. Направление ω_{AB} определяется уже известным способом.

План ускорений. Дано: \bar{w}_A и \bar{w}_C . Определить \bar{w}_D и $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{BC}$. На расширенной части направляющей намечаем точки C_x и D_x (рис. 33). Определим ускорения этих точек. Для точки C_x имеем

$$\bar{w}_{C_x} = \bar{w}_A + \bar{w}_{C_xA}^n + \bar{w}_{C_xA}^t. \quad (37)$$

$$\bar{w}_{C_x} = \bar{w}_C + \bar{w}_{C_xC}^k + \bar{w}_{C_xC}^r. \quad (38)$$

В этих уравнениях $w_{C_xA}^n = \omega_{xx}^2 (AC) \parallel \bar{AC}$; $\bar{w}_{C_xA}^t \perp AC$; $w_{C_xC}^k = 2\omega_{xx}v_{C_xC} \perp xx$ направлено снизу вверх; $w_{C_xC}^r \parallel xx$.

Строим уравнение (37). Откладываем отрезок $O_va' = \bar{w}_A$ в масштабе k_w , затем строим отрезок $a'n_1 = \bar{w}_{C_xA}^n$ и из точки n_1 проводим прямую $\perp AC$ — направление вектора $\bar{w}_{C_xA}^t$.

Строим уравнение (38). Откладываем отрезок $O_w c'$ — вектор $\bar{\omega}_C$ в масштабе k_w , затем отрезок $c'k_1$ — $\bar{\omega}_{C_x}^k$ и из точки k_1 проводим прямую $\parallel xx$ — направление вектора $\bar{\omega}_{C_x}^k$. Точку c_x , пересечение прямых $\perp AC$ и $\parallel xx$, соединяем с точкой O_w . Получаем отрезок $O_w c_x$ — ускорение $\bar{\omega}_{C_x}$ в масштабе k_w . Для определения ускорения точки D_x

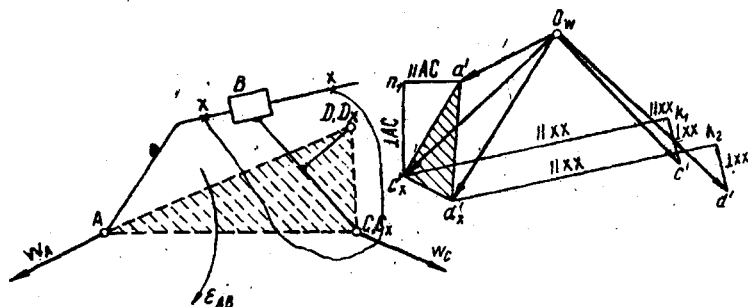


Рис. 33.

в плане ускорений соединяем прямой точки a' и c_x , на отрезке $a'c_x$ строим $\triangle a'c_x d_x \sim \triangle AC_x D_x$. Полученную таким образом точку d_x соединяем с точкой O_w . Отрезок $O_w d_x$ — ускорение $\bar{\omega}_{D_x}$ в масштабе k_w . Ускорение $\bar{\omega}_D$ определяем путем построения уравнения

$$\bar{\omega}_D = \bar{\omega}_{D_x} + \bar{\omega}_{DD_x}^r + \bar{\omega}_{DD_x}^k. \quad (39)$$

В этом уравнении $\bar{\omega}_{DD_x}^r = -\bar{\omega}_{D_x D}^r = -\bar{\omega}_{C_x C}^r$ и $\bar{\omega}_{DD_x}^k = -\bar{\omega}_{D_x D}^k = -\bar{\omega}_{C_x C}^k$ (см. задачу 4). Таким образом, в правой части уравнения (39) — сумма известных векторов. Построим эту сумму. Вектор $\bar{\omega}_{D_x}$ уже построен — это отрезок $O_w d_x$. Из точки d_x откладываем отрезок $d_x k_2 = c_x k_1$, так как $\bar{\omega}_{DD_x}^r = \bar{\omega}_{CC_x}^r = (c_x k_1) k_w$. Далее из точки k_2 откладываем отрезок $k_2 d' = k_1 c'$, так как $\bar{\omega}_{DD_x}^k = -\bar{\omega}_{C_x C}^k = -(k_1 c') k_w$.

Точку d' соединяем с точкой O_w — получаем отрезок $O_w d'$, равный вектору $\bar{\omega}_D$ в масштабе k_w . Угловое ускорение $\epsilon_{AB} = \epsilon_{BC} = \epsilon_{xx} = \frac{\omega_{C_x A}^k}{AC} = \frac{(n_1 c_x) k_w}{AC}$. Направление углового ускорения определяется обычным путем.

Построение планов скоростей и ускорений для групп 2-го класса 4-го и 5-го видов особого смысла не имеет, так как эти группы включают в себя элементы трех предыдущих групп и нового в решении задач не будет.

§ 7. Планы скоростей и ускорений для групп 3-го класса

Группа 3-го класса (рис. 34) является группой 3-го порядка, т. е. она присоединяется к механизму тремя крайними элементами кинематических пар, поэтому заданными будут кинематические параметры именно этих элементов пар. В другой постановке задача не будет иметь смысла.

План скоростей. Дано: $\vec{v}_A, \vec{v}_E, \vec{v}_F$. Определить скорости точек B, C, D и угловые скорости всех звеньев.

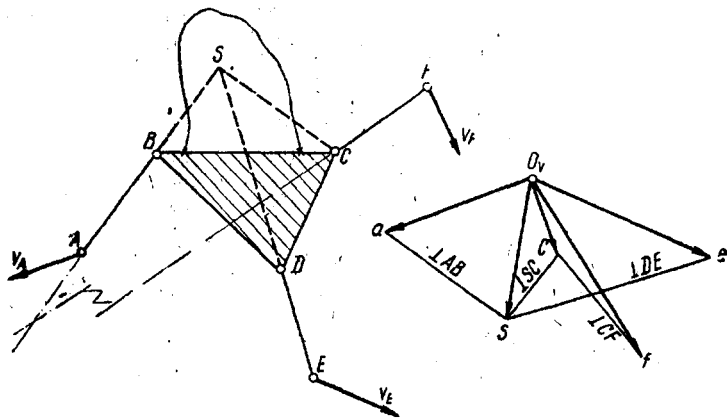


Рис. 34.

При решении задачи будем использовать особые точки Ассура. Особая точка Ассура S (см. рис. 34) располагается на пересечении направлений каких-либо двух поводков. Следовательно, можно иметь три особые точки Ассура. Для решения задачи достаточно получить одну особую точку. Удобно принять такую из трех точек, которая располагается близко к жесткому звену BCD . Это при одном и том же масштабе k_v позволяет получить наименьшие габариты плана скоростей.

В рассматриваемом случае примем за особую точку Ассура точку S , являющуюся результатом пересечения направлений AB и DE . Звено BCD расширяем и полагаем, что точка S принадлежит этому звену. Следовательно, отрезки $BSCD$ образуют жесткое звено. Определим скорость точки S . Имеем: $\vec{v}_S = \vec{v}_B + \vec{v}_{SB}$. Но $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, тогда

$$\vec{v}_S = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{SB}. \quad (40)$$

Здесь $\vec{v}_{BA} \perp AB$, $\vec{v}_{SB} \perp BS$ или, что то же самое, $\vec{v}_{SB} \perp AB$, так как направления AB и BS совпадают. Таким образом, два неизвестных вектора \vec{v}_{BA} и \vec{v}_{SB} имеют одно направление и в уравнение (40) входят как одно неизвестное. В этом состоит смысл особой

точки Ассура. Другое уравнение для определения \bar{v}_S составляют уже по аналогии с уравнением (40):

$$\bar{v}_S = \bar{v}_E + \bar{v}_{DE} + \bar{v}_{SD}. \quad (41)$$

Здесь $\bar{v}_{DE} \perp DE$ и $\bar{v}_{SD} \perp DS$ или, что то же самое, $\bar{v}_{SD} \perp DE$. Строим уравнение (40). Из полюса O_v откладываем отрезок $O_v a$ — скорость \bar{v}_A в масштабе k_v , затем из точки a проводим прямую $\perp AB$ — направление суммы векторов $\bar{v}_{BA} + \bar{v}_{SB}$.

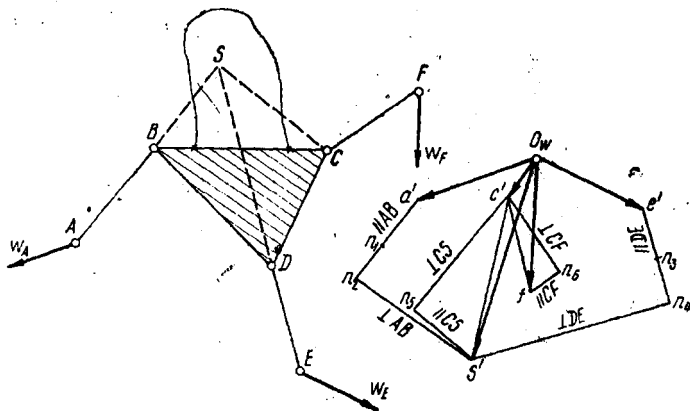


Рис. 35.

Строим уравнение (41). Откладываем отрезок $O_v e$ — скорости \bar{v}_E и из точки e проводим прямую $\perp DE$ — направление суммы векторов $\bar{v}_{DE} + \bar{v}_{SD}$. Точку s пересечения прямых $\perp AB$ и $\perp DE$ соединяем с точкой O_v . Отрезок $O_v s$ — скорость \bar{v}_S в масштабе k_v .

Далее определяем скорость точки C — точки, которая не участвует в определении положения точки S . Точку C соединяем прямой с точкой S , получаем группу звеньев SCF . Такая задача уже встречалась (см. группу 2-го класса 1-го вида). Скорость точки C определится построением уравнений

$$\bar{v}_C = \bar{v}_S + \bar{v}_{CS} \quad \text{и} \quad \bar{v}_C = \bar{v}_F + \bar{v}_{CF},$$

где $\bar{v}_{CS} \perp CS$ и $\bar{v}_{CF} \perp CF$.

Аналогичные уравнения уже строили. Этим заканчивается построение плана скоростей для группы 3-го класса. Далее решение задачи аналогично предыдущему. Действительно, скорости точек B и D можно определить, построив на отрезке SC в плане скоростей фигуру $scdb$ со фигуре $SCDB$. Угловые скорости, как и ранее, определяются по относительным скоростям.

План ускорений. Дано: $\bar{w}_A, \bar{w}_E, \bar{w}_F$. Определить ускорения точек B, C, D и угловые ускорения всех звеньев (рис. 35).

При построении плана ускорений, как и ранее, полагаем, что план скоростей построен и все, что касается скоростей, известно. Последовательность построения плана ускорений будет та же, что и при построении плана скоростей.

Вначале определим ускорение особой точки Ассура S . Для точки S имеем: $\bar{\omega}_S = \bar{\omega}_B + \bar{\omega}_{SB}^n + \bar{\omega}_{SB}^t$, но $\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{BA}^n + \bar{\omega}_{BA}^t$, тогда

$$\bar{\omega}_S = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{SB}^n + \bar{\omega}_{BA}^n + \bar{\omega}_{SB}^t + \bar{\omega}_{BA}^t. \quad (42)$$

В этом уравнении $\omega_{SB}^n = \omega_{BC}^2 (BS) \parallel \overrightarrow{BS}$, причем $\omega_{BC} = \omega_{BS}$, так как звено $BSCD$ жесткое. $\omega_{BA}^n = \omega_{AB}^2 (AB) \parallel \overrightarrow{AB}$; $\bar{\omega}_{SB}^t \perp BS$ (или, что то же самое, $\perp AB$) и $\bar{\omega}_{BA}^t \perp AB$, т. е. касательные ускорения имеют одно направление. Следовательно, в уравнении (42) два неизвестных представляются в виде суммы как одно неизвестное. Второе уравнение для определения $\bar{\omega}_S$ составим по аналогии с предыдущим уравнением

$$\bar{\omega}_S = \bar{\omega}_E + \bar{\omega}_{SD}^n + \bar{\omega}_{DE}^n + \bar{\omega}_{SD}^t + \bar{\omega}_{DE}^t. \quad (43)$$

Здесь $\omega_{SD}^n = \omega_{BC}^2 (SD) \parallel \overrightarrow{SD}$; $\omega_{DE}^n = \omega_{DE}^2 (DE) \parallel \overrightarrow{DE}$; $\bar{\omega}_{SD}^t$ и $\bar{\omega}_{DE}^t \perp DE$.

Строим уравнение (42). Из точки O_w (см. рис. 35) откладываем отрезок $O_w a'$ — ускорение $\bar{\omega}_A$ в масштабе k_w , из точки a' — отрезок $a' n_1$, а из точки n_1 — отрезок $n_1 n_2$ соответственно ускорения $\bar{\omega}_{SB}^n$ и $\bar{\omega}_{BA}^n$ в их направлениях. Затем из точки n_2 проводим прямую $\perp AB$ — направление $\bar{\omega}_{SB}^t + \bar{\omega}_{BA}^t$.

Строим уравнение (43). Откладываем отрезок $O_w e'$ — ускорение $\bar{\omega}_E$, из точки e' по направлению \overrightarrow{SD} откладываем отрезок $e' n_3$ и из точки n_3 по направлению \overrightarrow{DE} — отрезок $n_3 n_4$ соответственно ускорения $\bar{\omega}_{SD}^n$ и $\bar{\omega}_{DE}^n$. Из точки n_4 проводим $\perp DE$ — направление суммы ускорений $\bar{\omega}_{SD}^t + \bar{\omega}_{DE}^t$. Точку s' пересечения прямых $\perp AB$ и $\perp DE$ соединяем с точкой O_w , получаем отрезок $O_w s'$ — ускорение $\bar{\omega}_S$ в масштабе k_w .

Далее определяем ускорение точки C из уравнений

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_S + \bar{\omega}_{CS}^n + \bar{\omega}_{CS}^t$$

и

$$\bar{\omega}_C = \bar{\omega}_F + \bar{\omega}_{CF}^n + \bar{\omega}_{CF}^t,$$

где $\omega_{CS}^n = \omega_{BC}^2 (CS) \parallel \overrightarrow{CS}$;

$\bar{\omega}_{CS}^t \perp CS$;

$\omega_{CF}^n = \omega_{CF}^2 (CF) \parallel \overrightarrow{CF}$;

$\bar{\omega}_{CF}^t \perp CF$.

Построение этих уравнений производится уже известным способом (см. группу 2-го класса 1-го вида).

Ускорение точек B и D можно получить путем построения на отрезке $c's'$ фигуры $s'c'd'b'$ от фигуры $SCDB$. Угловые ускорения звеньев определяются обычным путем по относительным тангенциальным ускорениям. В том случае, когда группа 3-го класса со-

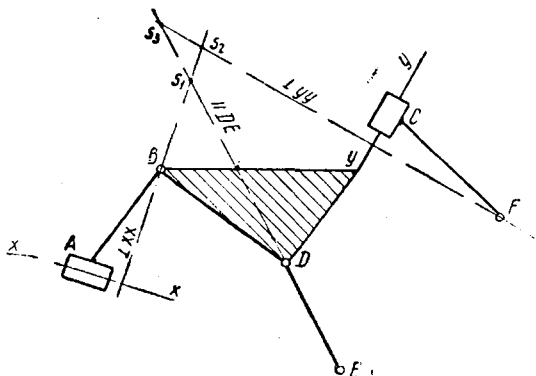


Рис. 36.

держит не только вращательные, но и поступательные пары, особые точки Ассура определяются так, как показано на рис. 36.

Пример на построение плана скоростей и ускорений для механизма (рис. 37). Дано: длины и взаимное расположение всех звеньев механизма, $\omega_{OA} = \text{const}$ — угловая скорость кривошипа OA . Определить скорости и ускорения всех точек, угловые скорости и ускорения звеньев.

Определение скоростей. Вначале находим $v_A = \omega_{OA}(OA) \perp \perp OA$ в направлении ω_{OA} . Звено BC обозначим через xx — направляющую, вдоль которой в относительном движении перемещается ползун A . Пометим точку A_x , совпадающую с точкой A , но принадлежащую направляющей xx (звену BC). Скорости

$$\bar{v}_{A_x} = \bar{v}_A + \bar{v}_{A_x A}$$

и

$$\bar{v}_{A_x} = \bar{v}_B + \bar{v}_{A_x B},$$

где $\bar{v}_{A_x A} \parallel xx$;

$$\bar{v}_B = 0;$$

$$\bar{v}_{A_x B} \perp xx.$$

Построим эти уравнения. Выбираем масштаб построения $k_v \left[\frac{\text{м}}{\text{сек}} \cdot \frac{1}{\text{мм}} \right]$.

Из точки O_v — полюса плана скоростей (см. рис. 37) откладываем отрезок $O_v a$ — скорость \bar{v}_A в масштабе k_v и из точки a проводим прямую $\parallel xx$ — направление вектора $\bar{v}_{A_x A}$. Затем откладываем вектор \bar{v}_B , но так как $\bar{v}_B = 0$, то точка b будет находиться в точ-

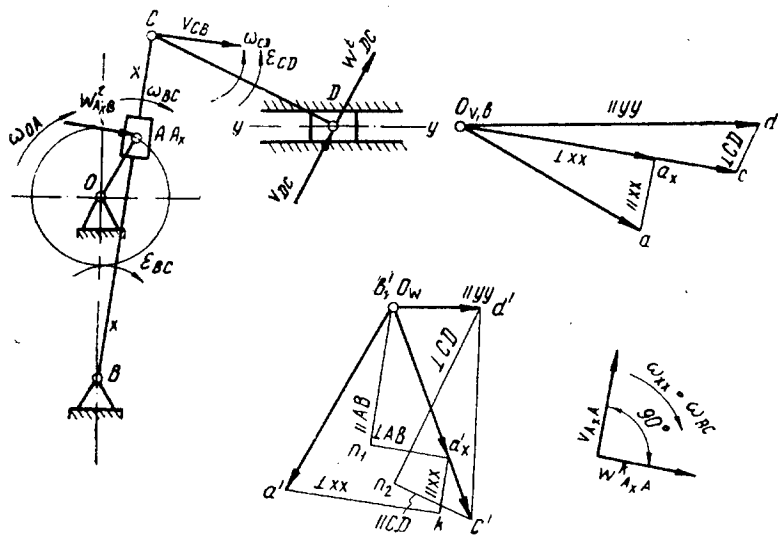


Рис. 37.

ке O_v . Из точки b проводим прямую $\perp xx$ — направление вектора $\bar{v}_{A_x B}$. Пересечение направлений $\parallel xx$ и $\perp xx$ даст точку a_x .

Отрезок $O_v a_x$ — скорость \bar{v}_{A_x} в масштабе k_v . Для определения скорости \bar{v}_C в плане скоростей на отрезке ba_x строим отрезок $ba_x c$ ω отрезку $BA_x C$. Следовательно, имеем $\frac{bc}{ba_x} = \frac{BC}{BA_x}$, откуда $bc = ba_x \frac{BC}{BA_x}$.

На продолжении отрезка ba_x откладываем отрезок bc . Полученный отрезок $O_v c$ — скорость \bar{v}_C в масштабе k_v .

Для определения скорости точки D составляем уравнение:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}.$$

Здесь $\bar{v}_{DC} \perp CD$ и $\bar{v}_D \parallel yy$, поэтому для отыскания \bar{v}_D достаточно только одного этого уравнения. Построим это уравнение. Из полюса O_v проведем прямую $\parallel yy$ — направление \bar{v}_D . \bar{v}_C уже построена — это отрезок $O_v c$. Из точки c проводим прямую $\perp CD$ — направление \bar{v}_{DC} . Получаем точку d пересечения прямых $\parallel yy$ и $\perp CD$. Отрезок $O_v d$ — скорость \bar{v}_D в масштабе k_v .

Определим угловые скорости звеньев:

$$\omega_{BC} = \frac{v_{CB}}{BC} = \frac{k_v (bc)}{BC}$$

Направление ω_{BC} определим, перенеся вектор v_{CB} в точку C механизма,

$$\omega_{CD} = \frac{v_{DC}}{CD} = \frac{k_v (cd)}{CD}$$

Направление ω_{CD} определяем аналогичным образом.

Определение ускорений. $\omega_{OA} = \omega_{OA}^2 (OA) \parallel \overline{OA}$, т. е. будет одно нормальное ускорение, так как $\omega_{OA} = \text{const}$. Ускорения точки $A_x - \bar{\omega}_{Ax}$ определяются из уравнения

$$\bar{\omega}_{Ax} = \bar{\omega}_B + \bar{\omega}_{A_x B} + \bar{\omega}_{A_x B}^t \text{ и } \bar{\omega}_{Ax} = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{A_x A}^k + \bar{\omega}_{A_x A}^r$$

где $\bar{\omega}_B = 0$, так как точка B неподвижна;

$$\bar{\omega}_{A_x B}^n = \omega_{BC}^2 (AB) \parallel \overline{AB};$$

$$\bar{\omega}_{A_x B}^t \perp \overline{AB};$$

$$\bar{\omega}_{A_x A}^k = 2v_{A_x A} \omega_{xx} \perp xx; (\omega_{xx} = \omega_{BC})$$

$$\bar{\omega}_{A_x A}^r \parallel xx.$$

Направление $\bar{\omega}_{A_x A}^k$ определяется путем поворота вектора $v_{A_x A}$ в сторону ω_{xx} (см. рис. 37).

Построим уравнения. В точке O_w полюса плана ускорений помещаем точку b' , так как длина вектора $\bar{\omega}_B = 0$. Затем откладываем отрезок $b'n_1 \parallel \overline{AB}$ — ускорение $\bar{\omega}_{A_x B}^n$ и из точки n_1 проводим прямую $\perp \overline{AB}$ — направление ускорения $\bar{\omega}_{A_x B}^t$. Далее откладываем отрезок $O_w a'$ — ускорение $\bar{\omega}_A$ и отрезок $a'k \perp xx$ — ускорение $\bar{\omega}_{A_x A}^k$. Из точки k проводим прямую $\parallel xx$ — направление $\bar{\omega}_{A_x A}^r$. Точку a'_x — пересечения прямых $\perp \overline{AB}$ и $\parallel xx$ соединяем с полюсом O_w . Отрезок $O_w a'_x$ — ускорение $\bar{\omega}_{Ax}$ в масштабе k_w .

Ускорение точки C определяем, используя принцип подобия. На отрезке $b'a'_x$ строим отрезок $b'a'_x c' \sim$ отрезку $BA_x C$. Из соотношения $\frac{b'c'}{b'a'_x} = \frac{BC}{BA_x}$ имеем $b'c' = b'a'_x \frac{BC}{BA_x}$.

Ускорение точки D определим из уравнения

$$\bar{\omega}_D = \bar{\omega}_C + \bar{\omega}_{DC}^n + \bar{\omega}_{DC}^t$$

где $\bar{\omega}_D \parallel uu$, $\bar{\omega}_{DC}^n = \omega_{CD}^2 (CD) \parallel \overline{CD}$ и $\bar{\omega}_{DC}^t \perp \overline{CD}$.

Построим это уравнение. Из полюса O_w проведем прямую $\parallel yu$ — направление \bar{w}_D , из точки c' — прямую $c'n_2 \parallel \bar{CD}$ — ускорение \bar{w}_{DC}^n , из точки n_2 — прямую $\perp CD$ — направление \bar{w}_{DC}^t до пересечения с прямой $\parallel yu$ в точке d' . Отрезок $O_w d'$ — ускорение \bar{w}_D в масштабе k_w . Угловое ускорение звена CD $\varepsilon_{CD} = \frac{w_{DC}^t}{CD} = \frac{(n_2 d') k_w}{CD}$. Направление этого ускорения определим, перенеся вектор \bar{w}_{DC}^t в точку D механизма. Угловое ускорение $\varepsilon_{BC} = \frac{w_{A,B}^t}{AB} = \frac{(n_1 a_x) k_w}{AB}$. Направление определяется аналогично предыдущему.

§ 8. Построение кинематических диаграмм

Графическое дифференцирование и интегрирование

Метод кинематических диаграмм применяется при анализе и синтезе механизмов в тех случаях, когда какой-либо закон движения точки или звена механизма задан в виде графической зависимости в функции времени.

Установим основную зависимость метода. Имеем график $\bar{s} = f(\bar{t})$ перемещения точки в функции времени (рис. 38). Точка движется прямолинейно. Масштаб перемещений обозначим через $k_s \left[\frac{м}{мм} \right]$, а времени — $k_t \left[\frac{сек}{мм} \right]$, тогда действительные перемещения и время будут определяться выражениями: $s = k_s \bar{s}$ и $t = k_t \bar{t}$,

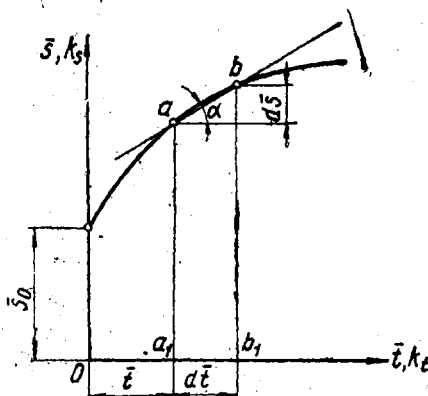


Рис. 38.

где \bar{s} и \bar{t} — соответственно перемещение и время на графике. Пусть в момент времени t перемещение точки определяется на графике координатой aa_1 . Через бесконечно малый промежуток $dt = k_t d\bar{t}$ перемещение точки будет определяться координатой $bb_1 = aa_1 + ds$, т. е. перемещение увеличивается на величину $ds = k_s d\bar{s}$. Скорость перемещающейся точки $v = \frac{ds}{dt} = \frac{k_s d\bar{s}}{k_t d\bar{t}}$, но $\frac{d\bar{s}}{d\bar{t}} = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому

$$v = \frac{k_s}{k_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (44)$$

Здесь α — угол наклона хорды ab к оси абсцисс (см. рис. 38). В пределе угол α будет углом наклона касательной. Полученное

выражение (44) является зависимостью, на которой основано действие графического дифференцирования. Покажем, что в результате проведенного построения получена дифференциальная кривая и это построение действительно будет графическим дифференцированием.

Имеем график $\bar{s}=f(\bar{t})$ перемещения точки, движущейся прямолинейно (рис. 39). Масштабы времени и перемещения будут соответственно k_t и k_s . Время движения точки разделим на ряд равных участков (в рассматриваемом случае 6 участков). На кривой $\bar{s}=f(\bar{t})$ пометим точки $a, b, c \dots$ и проведем в каждой из этих точек касательные прямые I, II, III... Ниже, под графиком $\bar{s}=f(\bar{t})$, построим прямоугольную систему координат с теми же участками времени. Ось абсцисс продолжим влево от оси ординат и на произвольном расстоянии H отложим точку p — полюс построения. Из точки p проведем прямые, параллельные касательным, до пересечения с осью ординат $pa' \parallel I, pb' \parallel II, pc' \parallel III, \dots$. Полученные точки a', b', c', \dots сносим на соответствующие ординаты — получаем точки $a_1, b_1, c_1 \dots$, которые соединяем плавной кривой.

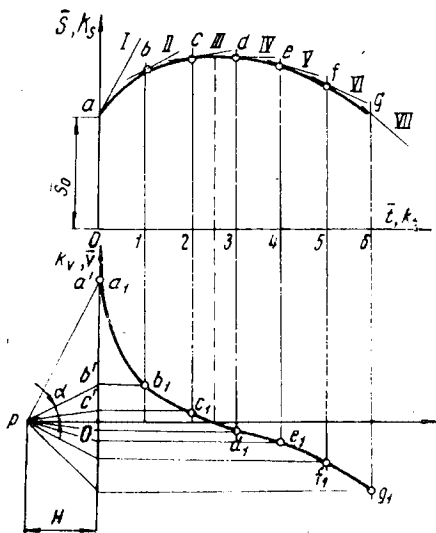


Рис. 39.

Установим, что представляет собой полученная кривая. Ее произвольная ордината $1b_1 = ob' = H \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол наклона касательной к первоначальной кривой). Таким образом, ординаты вновь полученной кривой так же, как и скорость v , пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к кривой $\bar{s}=f(\bar{t})$, т. е. одной и той же величине. Следовательно, ординаты вновь полученной кривой представляют собой скорость точки, движущейся прямолинейно в масштабе k_v , пока неизвестном, а проведенное построение есть действие графического дифференцирования. Теперь имеем право на оси ординат нижнего графика (см. рис. 39) показать \bar{v} и масштаб k_v . Найдем этот масштаб. Значение скорости

$$v = k_v \bar{v} = k_v H \operatorname{tg} \alpha \text{ и } v = \frac{k_s}{k_t} \operatorname{tg} \alpha.$$

Приравнявая правые части этих выражений и сокращая на $\operatorname{tg} \alpha$, получим

$$k_v = \frac{k_s}{H k_t}. \tag{45}$$

Обычно пользуются методом графического дифференцирования, не требующим проведения касательных, так как невозможно точно провести касательную к кривой без особых приспособлений. Рассмотрим этот метод. Заданную кривую (рис. 40, а) заменяем графиком в виде ломаной линии, полагая, что закон изменения перемещения точки на каждом отрезке времени есть прямая, т. е. скорость на каждом участке постоянна. При дифференцировании кривой $\bar{s}=f(\bar{t})$ в этом случае из точки p (рис. 40, б) проводим прямые $pa' \parallel ab$, $pb' \parallel bc \dots$. В результате получаем ступенчатый график скорости. Через этот график проводим плавную кривую, соединяя точки $a_1, b_1 \dots$, которые располагаются в середине каждого участка. Для получения более точной кривой следует ее проводить так, чтобы избыток и недостаток заштрихованных площадок на каждом участке был одинаков. Этот метод графического дифференцирования дает достаточно точные результаты, для использования их при практических расчетах.

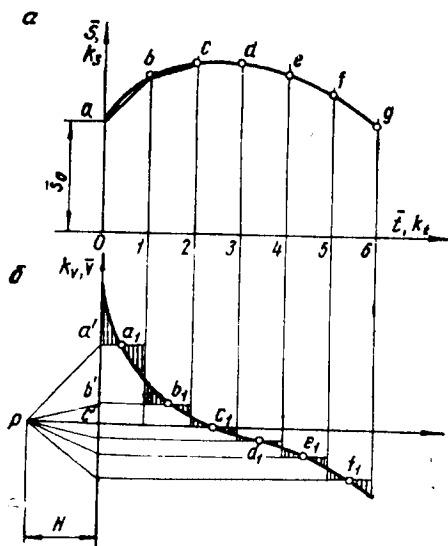


Рис. 40.

Графическое интегрирование рассматриваем как действие, обратное графическому дифференцированию. Осуществляется оно следующим образом. График $\bar{v}=f'(\bar{t})$, который в этом случае является заданным в виде плавной кривой (см. рис. 40, б), заменяем ступенчатым, принимая точки $a_1, b_1, c_1 \dots$ в середине соответствующего отрезка времени. Затем эти точки сносим на ось ординат и полученные точки $a', b', c' \dots$ соединяем прямыми с точкой p . В новой системе координат (см. рис. 40, а) принимаем точку a на оси координат с ординатой, равной \bar{s}_0 , соответствующей постоянной интегрирования, определенной из начальных условий, в данном случае — началу отсчета перемещений точки. Затем проводим прямые $ab \parallel pa'$, $bc \parallel pb'$, \dots , получаем график $\bar{s}=f(\bar{t})$ в виде ломаной линии. Точки a, b, c, \dots соединяем плавной кривой. Масштаб нового графика получим из формулы (45): $k_s = Hk_t k_v$.

Установим, как производится графическое дифференцирование, если точка движется не прямолинейно, как это рассматривалось, а по замкнутой траектории. Имеем замкнутую траекторию движения

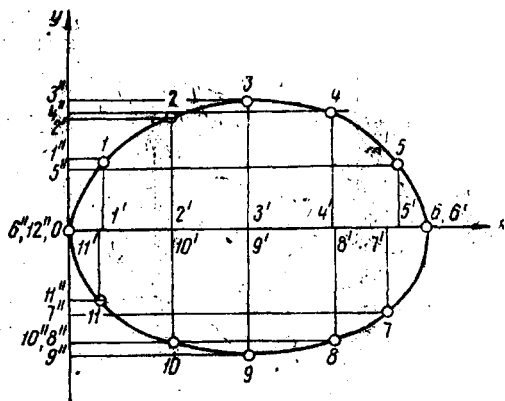


Рис. 41.

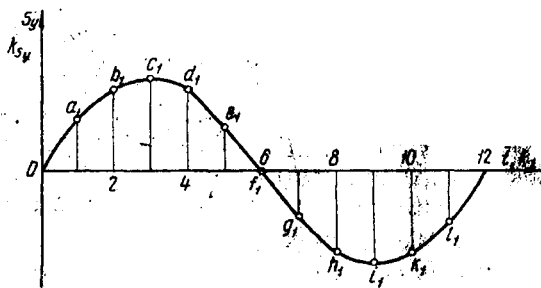
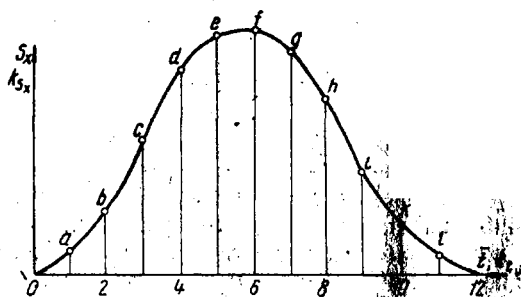


Рис. 42.

точки (рис. 41), ее положения через равные промежутки времени помечены цифрами 0, 1, 2, ... 12. Отнесем эту траекторию к прямоугольной системе координат x, y . Перемещение точки разложим на перемещения вдоль осей x и y . Вдоль оси x точка последовательно занимает положения 0, 1', 2', 3', ..., вдоль оси y — положения 0, 1'', 2'', 3'', ...

Построим график перемещения точки вдоль оси x . Для этого в прямоугольной системе координат $s_x, \alpha t$ последовательно откладываем ординаты $\overline{1a} = \overline{o1'}$, $\overline{2b} = \overline{o2'}$, $\overline{3c} = \overline{o3'}$, ... Аналогично в системе координат $s_y, \alpha t$ строим график перемещения точки вдоль оси y , откладывая ординаты $\overline{1a_1} = \overline{o1''}$, $\overline{2b_1} = \overline{o2''}$, $\overline{3c_1} = \overline{o3''}$, ... В результате получены графики (рис. 42) перемещения точки, движущейся прямолинейно (вдоль осей x и y). Теперь эти графики можно дифференцировать ранее рассмотренным методом. Для получения полной скорости движения по ее траектории используем зависимость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

При помощи повторного графического дифференцирования зависимости $\overline{s} = f(\overline{t})$ можно получить графическую зависимость ускорения точки в функции времени. Однако следует иметь в виду, что повторное графическое дифференцирование не дает необходимой точности.

§ 9. Аналитическая кинематика механизмов

Наряду с двумя рассмотренными методами кинематического анализа (метода плана скоростей и ускорений и метода кинематических диаграмм) применяется аналитический метод, основанный на отыскании аналитических выражений, определяющих все кинематические параметры точки или звена механизма — перемещение, скорость и ускорение. Обычно аналитический метод позволяет получить результат с необходимой степенью точности, которая значительно выше, чем при графическом и графо-аналитическом методах. Однако аналитическое решение очень часто приводит к чрезвычайно громоздким зависимостям, которыми можно пользоваться, только применяя вычислительные машины.

Рассмотрим аналитическую кинематику наиболее простых и вместе с тем наиболее распространенных механизмов.

Кривошипно-ползунный механизм

Этот механизм чрезвычайно широко применяется в машиностроении. Он используется в двигателях внутреннего сгорания, поршневых насосах и компрессорах, станах холодной прокатки труб и других машинах. Звено OA (рис. 43) называется кривошипом. Вообще кривошипом принято называть звено, входящее во вращательную пару 5-го класса со стойкой и делающее полный оборот. Звено AB — шатун, звено B — ползун. В общем случае

траектория ползуна B проходит от оси кривошипа на расстоянии a , называемом дезаксиалом. Поэтому такой механизм называется дезаксиальным кривошипно-ползунным механизмом. Частным случаем этого механизма будет аксиальный кривошипно-ползунный механизм при $a=0$.

Имеем дезаксиальный кривошипно-ползунный механизм (см. рис. 43) с дезаксиалом a и длинами звеньев r и l , угловая

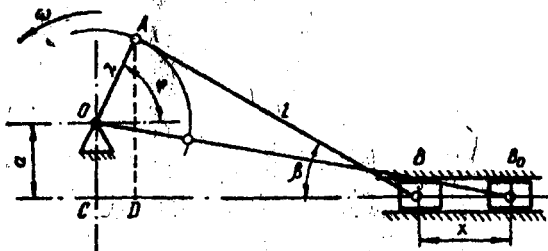


Рис. 43.

скорость кривошипа $\omega = \text{const}$. Необходимо определить перемещение, скорость и ускорение ползуна B . Положение кривошипа OA будем определять углом $\varphi = \omega t$, положение шатуна — углом β . Изобразим механизм, когда ползун B занимает крайнее положение B_0 . Проведем прямую $AD \perp BC$. Отсчет перемещений ползуна B будем вести от точки B_0 и определять координатой x .

Из чертежа имеем: $x = B_0C - BC$;

$B_0C = \sqrt{OB_0^2 - OC^2} = \sqrt{(r+l)^2 - a^2}$ и $BC = CD + BD = r \cos \varphi + l \cos \beta$, тогда

$$x = \sqrt{(r+l)^2 - a^2} - r \cos \varphi - l \cos \beta.$$

Выразим $\cos \beta$ через угол φ . $AD = l \sin \beta$ и $AD = a + r \sin \varphi$. Приравняв правые части, находим $\sin \beta = \frac{a+r \sin \varphi}{l}$, тогда $\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{a+r \sin \varphi}{l}\right)^2}$. Подставив значение $\cos \beta$ в выражение для x , получим:

$$x = \sqrt{(r+l)^2 - a^2} - r \cos \varphi - l \sqrt{1 - \left(\frac{a+r \sin \varphi}{l}\right)^2}. \quad (46)$$

Обычно в реальных механизмах $\frac{a}{l}$ и $\frac{r}{l} < \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}$. Представляя

$$\left[1 - \left(\frac{a+r \sin \varphi}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a+r \sin \varphi}{l}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{a+r \sin \varphi}{l}\right)^4.$$

и опуская с достаточной для практических расчетов степенью точности все члены ряда, кроме первых двух, после подстановки и преобразования будем иметь:

$$x = \sqrt{(r+l)^2 - a^2} - r \cos \varphi - l + \frac{a^2}{2l} + \frac{ar}{l} \sin \varphi + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \varphi. \quad (47)$$

Скорость ползуна B

$$v_B = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

но

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

тогда

$$v_B = \omega r \left(\sin \varphi + \frac{a}{l} \cos \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right). \quad (48)$$

Обычно принято обозначать $\frac{a}{l} = \lambda$ и $\frac{r}{l} = \delta$. Следовательно,

$$v_B = \omega r \left(\sin \varphi + \lambda \cos \varphi + \frac{\delta}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (49)$$

Ускорение ползуна B

$$w_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

тогда

$$w_B = \omega^2 r (\cos \varphi - \lambda \sin \varphi + \delta \cos 2\varphi). \quad (50)$$

Для аксиального кривошипно-шатунного механизма $a=0$, поэтому из (46) — (49) получим:

$$x = r(1 - \cos \varphi) + l \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi} \right]$$

и

$$\left. \begin{aligned} x &= r \left(1 - \cos \varphi + \frac{\delta}{2} \sin^2 \varphi \right); \\ v_B &= \omega r \left(\sin \varphi + \frac{\delta}{2} \sin 2\varphi \right); \\ w_B &= \omega^2 r (\cos \varphi + \delta \cos 2\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Кулисный механизм

Кулисный механизм (рис. 44) широко используется в станкостроении. Дано: $\omega = \text{const}$ — угловая скорость кривошипа OA ; длины звеньев и взаимное расположение элементов вращательных и поступательных пар и стойки, определяемое расстояниями a и b . Будем искать перемещение, скорость и ускорение ползуна C .

Рассмотрим механизм в каком-либо его положении, определяемом углом φ . Положение кулисы AB будет определяться углом β , ползуна C — координатой x . По чертежу имеем $x = b \operatorname{tg} \beta$. Из точки A проведем прямую $AD \perp OB$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{AD}{BD}$, но $AD = r \cos \varphi$, а $BD = a + r \sin \varphi$, поэтому

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \cos \varphi}{a + r \sin \varphi}$$

и

$$x = b \frac{r \cos \varphi}{a + r \sin \varphi} \quad (52)$$

Скорость ползуна C :

$$v_C = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{dx}{d\varphi};$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = br \frac{-a \sin \varphi - r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi}{(a + r \sin \varphi)^2} =$$

$$= br \frac{-a \sin \varphi - r(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{(a + r \sin \varphi)^2} =$$

$$= -br \frac{r + a \sin \varphi}{(a + r \sin \varphi)^2};$$

и

$$v_C = -\omega br \frac{r + a \sin \varphi}{(a + r \sin \varphi)^2} \quad (53)$$

Ускорение ползуна C

$$\omega_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{dv_C}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d^2 x}{d\varphi^2};$$

$$\frac{dv_C}{d\varphi} = -\omega rb \frac{a \cos \varphi (a + r \sin \varphi)^2 - 2(a + r \sin \varphi) r \cos \varphi (r + a \sin \varphi)}{(a + r \sin \varphi)^4} =$$

$$= -\omega rb \frac{a(a + r \sin \varphi) - 2r(r + a \sin \varphi)}{(a + r \sin \varphi)^3} \cos \varphi;$$

$$\omega_C = -\omega^2 rb \frac{a(a + r \sin \varphi) - 2r(r + a \sin \varphi)}{(a + r \sin \varphi)^3} \cos \varphi \quad (54a)$$

или

$$\omega_C = -\omega^2 rb \frac{a - 2r \frac{r + a \sin \varphi}{a + r \sin \varphi}}{(a + r \sin \varphi)^2} \cos \varphi. \quad (54b)$$

Знак « \rightarrow » у v_C и ω_C указывает на то, что они направлены в обратную сторону отсчета x .

Универсальный шарнир (шарнир Гука, карданная передача)

Универсальный шарнир применяется (рис. 45) при передаче вращательного движения между звеньями, оси которых пересекаются, причем угол между осями в процессе движения может меняться.

Такой шарнир используется в автомобилях при передаче движения от коробки скоростей к заднему мосту, в прокатных станах, сварочных машинах и ряде машин металлургического производства. Звенья 1 и 2 (рис. 45) называются вилками, а звено 3 — крестовиной. Стержни A_0A_0 и B_0B_0 крестовины пересекаются под углом 90° . Пары A_0 и B_0 — вращательные пары 5-го класса.

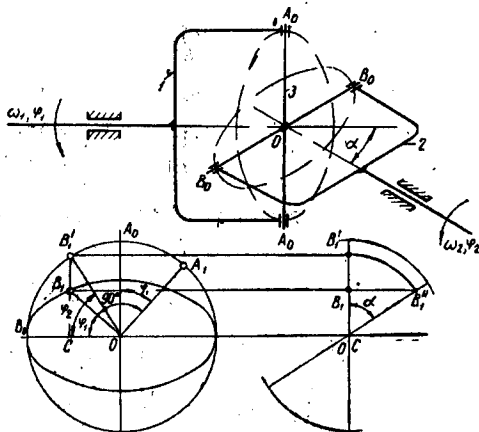


Рис. 45.

Найдем соотношения между угловыми скоростями звеньев шарнира. Дано: α — постоянный для данного отрезка времени угол между осями звеньев 1 и 2; ω_1 — угловая скорость и φ_1 — угол поворота звена 1. Требуется найти угол φ_2 поворота звена 2 и его угловую скорость ω_2 .

Траекториями точек A и B будут окружности в плоскостях, перпендикулярных осям звеньев 1 и 2. Изобразим траекторию точки A в ее плоскости — это будет окружность (см. рис. 45) и проекцию в этой плоскости траектории точки B — это будет эллипс. Дадим звену 1 угловое перемещение φ_1 , тогда точка A займет положение A_1 , а $\angle A_0OA_1 = \varphi_1$. Точка B на проекции ее траектории займет положение B_1 . Угол B_1OA_1 будет прямым углом, так как проекция прямого угла на плоскость, содержащую одну его сторону, также будет прямым углом. Поэтому $\angle B_1OC = \varphi_1$. На своей траектории точка B занимает положение B_1' (см. рис. 45), если же плоскость этой траектории совместить с плоскостью траектории точки A , то положение точки будет B_1 , а $\angle B_1'OC = \varphi_2$ — углу поворота звена 2. Из чертежа имеем $B_1'C = (OC) \operatorname{tg} \varphi_2$ и $B_1C = (OC) \operatorname{tg} \varphi_1$, отку-

$$\text{да } \frac{B_1C}{B_1'C} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}, \text{ но } \frac{B_1C}{B_1'C} = \frac{B_1C}{B_1'C} = \cos \alpha \text{ (см. рис. 45),}$$

тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \alpha} \quad (55)$$

Отсюда видно, что углы φ_1 и φ_2 не будут одинаковы. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \cos \alpha \frac{1}{\cos^2 \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt},$$

но

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2,$$

поэтому

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \cos \alpha \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1}.$$

Выразим $\cos \varphi_2$ через φ_1 . Известно, что

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}.$$

Подставляя значение $\operatorname{tg}^2 \varphi_2$, по выражению (55) получим

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi_1},$$

подставляя в отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \alpha \varphi_1}{\cos \alpha}.$$

после несложных преобразований будем иметь

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\cos \alpha}. \quad (56)$$

Из этого выражения видно, что отношение угловых скоростей зависит от угла φ_1 , который непрерывно меняется, поэтому при постоянной угловой скорости ω_1 угловая скорость ω_2 будет непрерывно меняться. Это определяет наличие углового ускорения ведомого звена 2, а следовательно, и дополнительные динамические крутящие моменты, передаваемые на звенья механизма и привод.

В машинах очень часто используется двойной универсальный шарнир, называемый карданной передачей. В этом случае такая передача может быть выполнена по схеме, изображенной на рис. 46, а, когда промежуточное звено 2' имеет вилки, расположенные в одной плоскости, или по схеме рис. 46, б, когда вилки промежуточного звена 2' располагаются во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Для схемы рис. 46, а имеем $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_2'$ и $\operatorname{tg} \varphi_2' = \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2$. Разделив эти равенства друг на друга, получим $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \operatorname{tg} \varphi_2$ при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$.

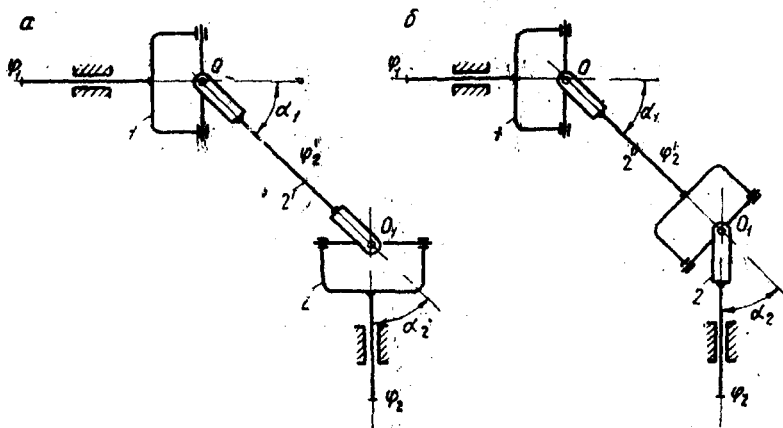


Рис. 46.

Для схемы рис. 46, б имеем $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_2'$ и $\operatorname{tg} \varphi_2' = \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2$. Из этих равенств имеем: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi_2$.

Таким образом, первая схема механизма позволяет при $\alpha_1 = \alpha_2$ исключить непостоянство угловой скорости ω_2 ведомого звена, а следовательно, и дополнительные динамические крутящие моменты.

Глава III. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ И ФРИКЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Самые разнообразные механизмы, в том числе и четырехзвенные, создаются исходя из условий удовлетворения требованиям технологического процесса. Однако независимо от этого создаваемый механизм должен обязательно удовлетворять ранее установленным структурным условиям.

§ 10. Условие существования кривошипа в четырехзвенном механизме

Создаваемый четырехзвенный механизм должен иметь звено, которое, входя во вращательную пару со стойкой, совершало бы

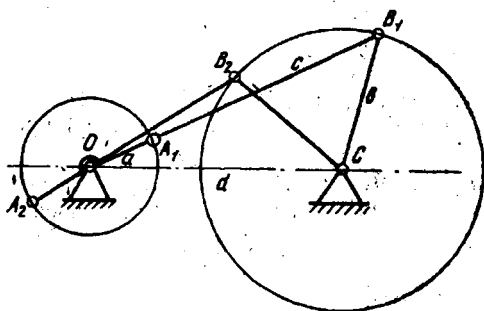


Рис. 47.

полный оборот, т. е. было бы кривошипом. Установим условие существования такого звена. Эта задача иначе называется задачей Грасгофа или условием проворачиваемости звена.

Четырехзвенный механизм в общем случае имеет различные длины звеньев $a < b < c < d$. Изобразим этот механизм в двух крайних положениях (рис. 47). Если механизм может занимать эти два положения, то при вращении звена a он займет и любое промежуточное положение. Следовательно, звено a в этом случае сделает полный оборот и будет кривошипом. Таким образом, существование кривошипа определяется $\triangle OB_1C$ и $\triangle OB_2C$.

Из $\triangle OB_1C$ имеем $OB_1 < B_1C + OC$ или $a + c < b + d$. Из $\triangle OB_2C$ имеем $OB_2 > OC - B_2C$ или $c - a > d - b$, откуда $a + d < b + c$. В первом неравенстве слева стоит сумма величин $(a + d)$, меньших чем справа, так как $a < b$, а $c < d$. Поэтому оно удовлетворяется всегда и не служит критерием, определяющим существование кривошипа. Таким образом, только второе неравенство является условием существования кривошипа в четырехзвенном механизме (условие Грасгофа). Следовательно, в четырехзвенном механизме будет криво-

шип, если сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше суммы двух других звеньев.

В схеме механизма (см. рис. 47) против наименьшего звена a располагалось второе по величине звено b . Возможны всего три

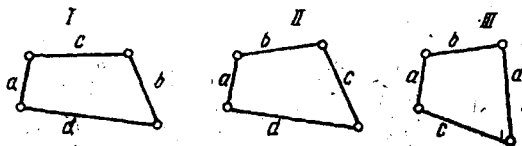


Рис. 48.

схемы (рис. 48). Для всех этих схем условие существования кривошипа будет одним и тем же, что не сложно проверить.

В рассматриваемых схемах кривошипом является звено a , но не только оно может быть кривошипом. Если всему механизму дать обратное движение с угловой скоростью, равной угловой скорости звена a , но противоположно направленной, то это звено остановится и будет стойкой, а стойка будет кривошипом.

§ 11. Синтез четырехзвенного механизма по заданным условиям

Требуется построить четырехзвенный механизм по заданным условиям.

1. Дано: три положения шатуна (рис. 49). Точки A_1 , A_2 и A_3 располагаются на дуге окружности с центром O , находящимся на оси вращения звена OA . Соединим эти точки хордами (рис. 50) и из их середины восстановим перпендикуляры, на пересечении которых будет располагаться искомая точка O .



Рис. 49.

Аналогичным образом находится точка C , располагающаяся на оси вращения звена BC . Если за кривошип принимается звено OA , то после построения производится проверка по условиям Грасгофа.

2. Дано: три положения кривошипа и три положения коромысла (рис. 51). Так как в общем случае $A_1C_1 \neq A_2C_2 \neq A_3C_3$, то решение следует искать в виде схемы, изображенной на рис. 52. Таким образом, задача сводится к отысканию положения пары B на звене CD . Для ее нахождения всему механизму даем обратное движение с угловой скоростью, равной угловой скорости звена CD , но направленной в обратную сторону (рис. 53). Тогда звено CD остановится, а весь механизм будет перемещаться относительно него. В этом случае звено AB будет вращаться вокруг точки B , а точка A будет перемещаться по дуге окружности с центром в точке B . Будем рассматривать движение точки A в обратном движении относительно первого

положения звена CD . Положение точки A_2 относительно звена CD определяется $\triangle A_2C_2D$. Если же C_2D совместится с C_1D , то новым положением точки A_2 будет положение A'_2 , которое находим путем построения $\triangle A'_2C_1D$, равного $\triangle A_2C_2D$.

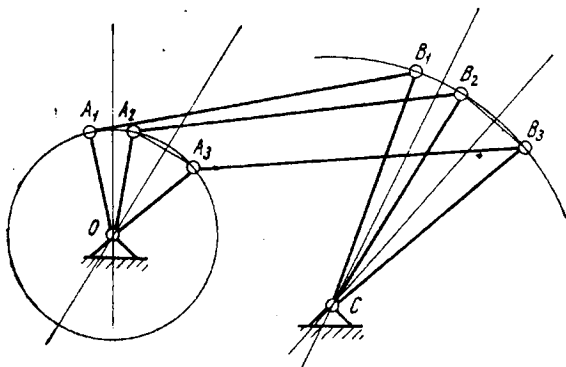


Рис. 50.

Аналогично находим положение точки A_3 путем построения $\triangle A'_3C_1D = \triangle A_3C_3D$. Теперь известно положение A_1, A_2, A_3 — точки A при ее движении по дуге окружности с центром в точке B , которую находим как результат пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков — хорд A_1A_2 и A_2A_3 .

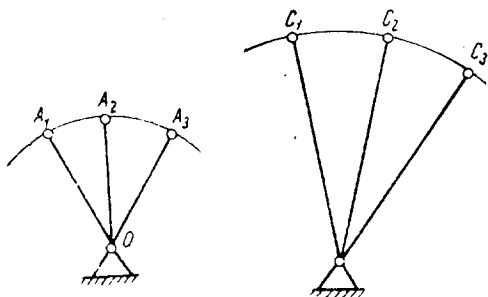


Рис. 51.

3. Дано: коэффициент изменения скорости хода и два крайних положения коромысла. Прежде чем приступить к построению механизма по заданным условиям, введем понятие коэффициента изменения скорости хода.

Изобразим четырехзвенный механизм в двух его крайних положениях (рис. 54). Угловая скорость звена $OA\omega_{OA} = \text{const}$. При переходе звена из положения 1 в положение 2 оно повернется на угол φ_1 , а при переходе из положения 2 в положение 1 — на угол φ_2 . Из чертежа имеем $\varphi_1 = 180^\circ - \theta$ и $\varphi_2 = 180^\circ + \theta$. Таким образом, время t_{1-2} , затрачиваемое на перемещение из положения 1 в 2, меньше времени t_{2-1} , затрачиваемого на перемещение из положения 2 в 1. Звено BC при переходе из положения 1 в положение 2 и обратно поворачивается на один и тот же угол, поэтому точка B при ходе вперед и назад будет иметь различные средние скорости v_{1-2} и v_{2-1} , причем $v_{1-2} > v_{2-1}$.

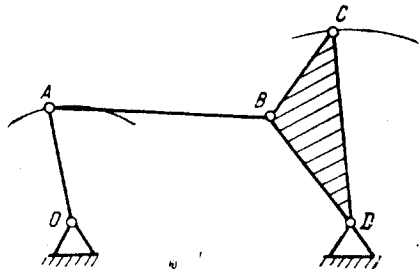


Рис. 52.

Назовем коэффициентом изменения скорости хода величину $k = \frac{v_{1-2}}{v_{2-1}}$, где $k > 1$, но так как $\frac{v_{1-2}}{v_{2-1}} = \frac{t_{2-1}}{t_{1-2}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, то $k = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}$

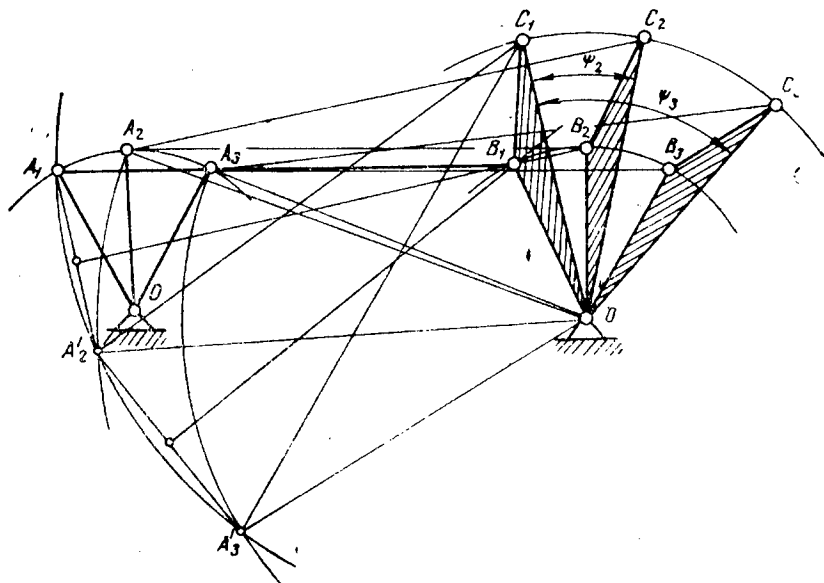


Рис. 53.

Переходим к построению механизма по заданным условиям. По заданному k находим угол $\theta = 180^\circ \frac{k-1}{k+1}$.

Изобразим два крайних положения звена BC (рис. 55). Точки B_1 и B_2 соединим прямой. При точке B_2 построим угол 90° , при точке B_1 угол $90^\circ - \theta$, тогда угол с вершиной в точке O' будет равен θ .

Вокруг $\triangle O'B_1B_2$ опишем окружность. Угол с вершиной в точке O' — вписанный угол, опирающийся на дугу B_1B_2 , следовательно, все вписанные углы, опирающиеся на эту дугу, будут равны θ . Поэтому в произвольной точке описанной окружности выбираем точку O и строим угол θ . В результате получим два крайних

положения четырехзвенного механизма, кривошип которого вращается вокруг точки O . Из чертежа имеем $OB_1 = r + l$ и $OB_2 = l - r$, где r — длина кривошипа и l — длина шатуна. Следовательно, $r = \frac{OB_1 - OB_2}{2}$. Возможность произвольного выбора положения

точки O определяет многозначное решение задачи, что позволяет использовать какое-либо дополнительное условие (например, габариты механизма). Производится проверка по условиям Грасгофа.

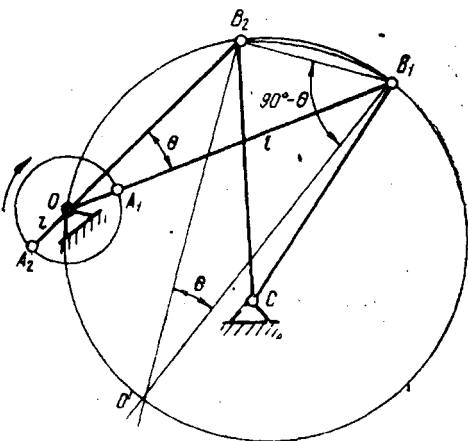


Рис. 55.

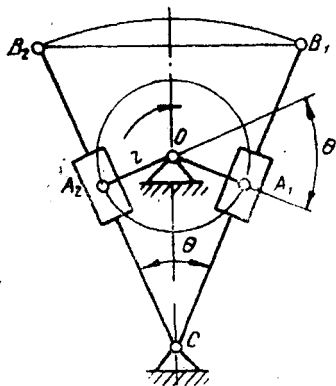


Рис. 56.

Установим, как осуществляется синтез кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода и двум крайним положениям точки B кулисы BC . Рассмотрим кулисный механизм в двух крайних положениях (рис. 56). Здесь угол между

положением кривошипа OA_1 и продолжением кривошипа в положении OA_2 равен θ . Углы B_1CB_2 и θ будут равны между собой как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Построение кулисного механизма по заданным условиям происходит следующим образом. Точки B_1 и B_2 , положение которых задано, соединим прямой. На прямой B_1B_2 строим равнобедренный, треугольник с углом при вершине C , равным углу θ . На прямой, делящей угол θ пополам в произвольной точке, выбираем точку O , вокруг которой вращается кривошип OA . Длину кривошипа OA определим, опустив на прямую B_1C (или B_2C) перпендикуляр. Полученный кулисный механизм будет удовлетворять заданным условиям.

§ 12. Фрикционные механизмы

Звенья, входящие в пары 4-го класса, могут иметь профили различных очертаний. Передача движения между звеньями в таких случаях будет осуществляться либо при качении со скольжением, либо при чистом качении одной кривой (поверхности) по другой.

Кривые, передающие движение при наличии качения со скольжением, называются взаимногибаемыми, а кривые, передающие движение только при качении, — центроидами относительного движения (поверхности — аксоидами относительного движения).

Отсутствие скольжения в центроидных механизмах и явлений, его сопровождающих, на первый взгляд делает такие механизмы более предпочтительными сравнительно с механизмами, в которых используются взаимногибаемые кривые. Однако на практике центроидные механизмы используются крайне редко. Это связано с тем, что центроиды относительного движения имеют, во-первых, сложные очертания даже при осуществлении сравнительно простого закона движения, во-вторых, — неблагоприятные соотношения усилий, действующих на звенья и пары центроидного механизма.

Взаимногибаемые кривые, как будет показано ниже, могут иметь простые формы, которые несложно осуществить практически.

Фрикционные механизмы являются наиболее простыми центроидными механизмами. На рис. 57 показана цилиндрическая фрикционная передача. Центроидами относительного движения здесь являются окружности, по которым очерчиваются катки 1 и 2. Фрикционный каток 1 имеет подвижную опору 4 и прижимается силой P к катку 2, имеющему неподвижную опору (стойку) 3. При вращении катка 1 с угловой скоростью ω_1 , каток 2 силой сцепления (трения) в месте контакта A приводится во вращение с угловой скоростью ω_2 .

Из условия равенства окружных скоростей точки контакта, принадлежащей каткам 1 и 2, $v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$, откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (57)$$

Это отношение есть передаточное отношение (или передаточное число). Передаточным отношением (числом) называется отношение угловой скорости звена, принятого за ведущее, к угловой

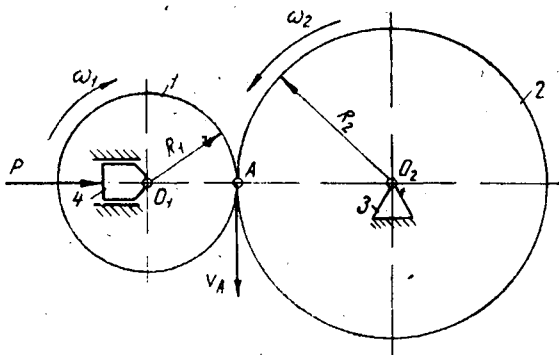


Рис. 57.

скорости звена, принятого за ведомое, т. е. $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. (Звено 1 — ведущее, звено 2 — ведомое, равенство $i_{1-2} = \frac{R_2}{R_1}$ — численное).

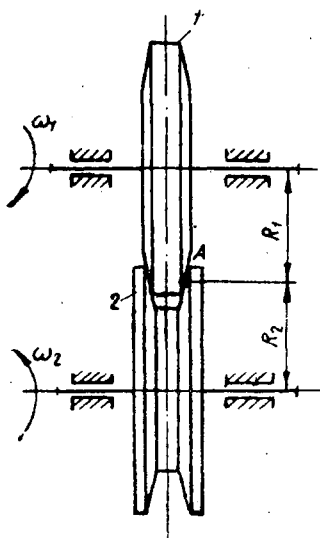


Рис. 58.

На рис. 58 показана фрикционная передача с клинчатыми катками, у которой, благодаря особой форме поверхностей фрикционных катков 1 и 2, сила сцепления, определяемая величиной центрального угла клинчатой поверхности (см. гл. VI), при всех прочих равных условиях значительно больше, чем у фрикционной передачи с цилиндрическими катками.

На поверхности контакта каждого клинчатого катка будет только одна точка А, скорости которой будут одинаковы. Из этого условия $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$. Другие точки будут иметь различные скорости, следовательно, поверхности катков будут проскальзывать и интенсивно изнашиваться. Поэтому такую передачу целесообразно использовать в механизмах, работающих непродолжительное время.

Для передачи движения между пересекающимися осями применяется фрикцион-

ная передача с коническими катками (рис. 59). Если вершины конусов конических катков будут располагаться в одной точке (точка O), то окружные скорости точек соприкасающихся поверхностей (аксидов относительного движения) катков 1 и 2, находящихся на одном и том же расстоянии от точки O , равны между собой. Из этого усло-

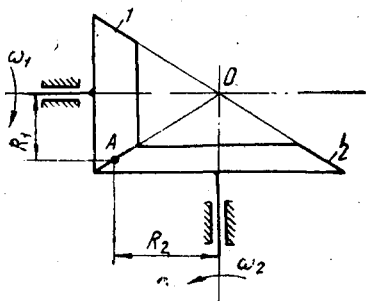


Рис. 59.

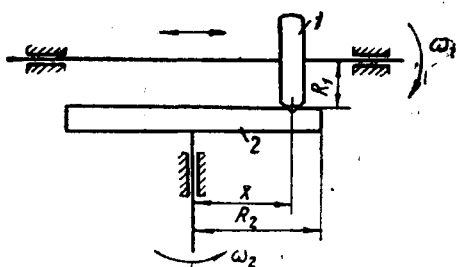


Рис. 60.

вия $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$. Здесь точка A может быть принята произвольной на образующей, поэтому R_1 и R_2 могут быть радиусами также произвольного сечения конических катков (наружные, внутренние и др.).

Фрикционные передачи используются в качестве вариаторов передач, позволяющих непрерывно изменять передаточное отношение.

На рис. 60 показана лобовая фрикционная передача-вариатор. Здесь $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x}{R_1}$. При осевом перемещении катка 1 можно получить $0 \leq |x| \leq R_2$, поэтому $0 \leq i_{1-2} \leq \frac{R_2}{R_1}$. В этих

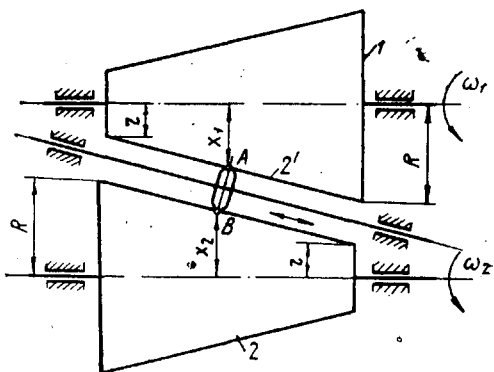


Рис. 61.

пределах можно получить любое значение i_{1-2} .

На рис. 61 показан вариатор с коническими фрикционными катками 1, 2 и промежуточным цилиндрическим катком 2'.

Из условия равенства окружных скоростей точек A и B имеем $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x_2}{x_1}$. При перемещении катка 2' вдоль его оси изменяются значения x_1 и x_2 в пределах $R \geq x \geq r$, поэтому и $\frac{R}{r} \geq i_{1-2} \geq \frac{r}{R}$.

В этих пределах передаточное отношение i_{1-2} может принимать любое значение. Обычно $3 \geq i_{1-2} \geq \frac{1}{3}$ исходя из удобства конструктивного оформления и исключения больших осевых усилий, воспринимаемых опорами конических катков. Показанными примерами фрикционных передач далеко не исчерпывается весь ряд таких передач, применяемых в машиностроении.

Достоинством фрикционных передач является простота устройства и изготовления фрикционных катков, а также возможность использования таких передач в качестве предохранительных устройств при перегрузках. При нагрузке фрикционных передач усилиями (моментами) выше расчетных происходит пробуксовка катков.

К недостаткам фрикционных передач следует отнести большую силу прижатия катков, превышающую в несколько раз передаваемое окружное усилие, и отсутствие гарантии определенного передаточного отношения вследствие возможного буксования фрикционных катков. Эти недостатки фрикционных передач полностью исключены в зубчатых передачах (механизмах).

Глава IV. ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Зубчатые механизмы являются наиболее распространенными в машиностроении. Образование простейшего зубчатого механизма (рис. 62)

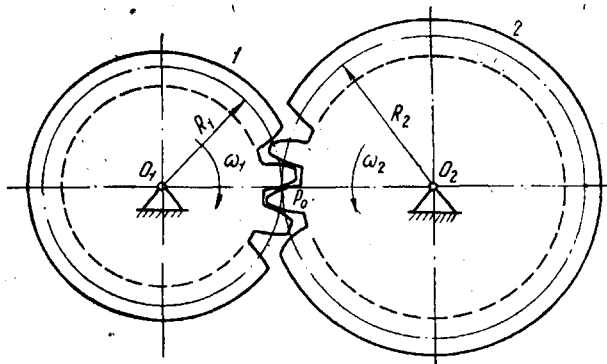


Рис. 62.

можно представить следующим образом. Если взять центроидную передачу с центроидами 1 и 2 и расположить на них последователь-

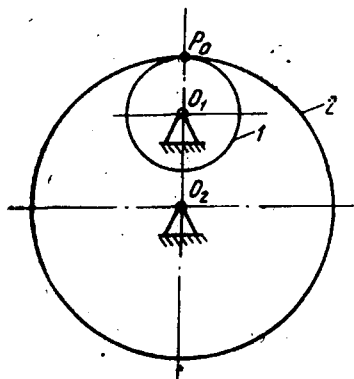


Рис. 63.

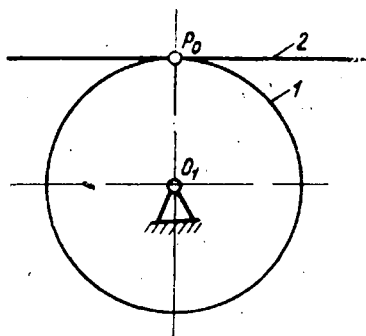


Рис. 64.

но чередующиеся выступы-зубья и впадины, то передача движения будет осуществляться при помощи боковых профилей зубьев. Эти профили представляют собой взаимнооггибаемые кривые.

Центроиды же относительного движения 1 и 2 с радиусами R_1 и R_2 называются начальными окружностями. Точка P_0 — мгновенный центр относительного движения (вращения), принадлежащая неподвижной плоскости, называется полюсом зацепления. Если точка P_0 располагается между осями вращения колес O_1 и O_2 (см. рис. 62), то зубчатая передача будет с внешним зацеплением. Если же точка P_0 располагается по одну сторону осей колес O_1 и O_2 (рис. 63), то зубчатая передача будет с внутренним зацеплением.

В том случае, когда одна из начальных окружностей имеет радиус бесконечно большой, т. е. вместо начальной окружности — начальная прямая, зацепление будет реечное (рис. 64), и вращательное движение зубчатого колеса 1 преобразуется в поступательное движение зубчатой рейки 2.

§ 13. Основные параметры зубчатого зацепления

Часть зуба, выступающая за начальную окружность (рис. 65), называется головкой зуба, а часть, располагающаяся до начальной окружности, — ножкой зуба.

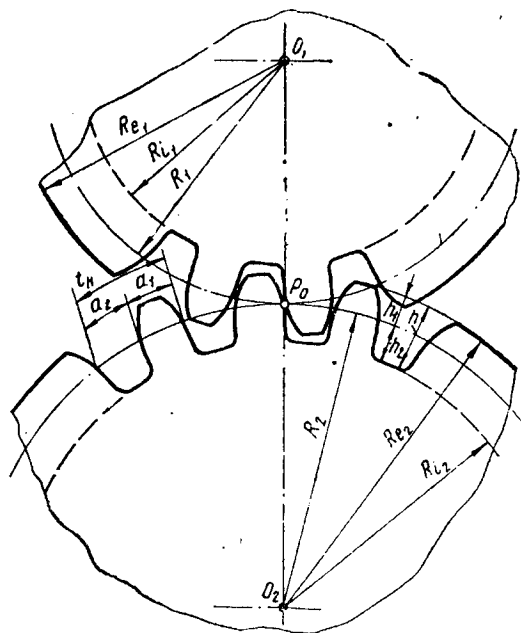


Рис. 65.

Окружность, ограничивающая головки зубьев, называется окружностью выступов, а окружность, ограничивающая впадины зубьев, — окружностью впадин.

Расстояние между одноименными точками соседних зубьев, измеренное по дуге окружности, называется шагом зацепления. Шаг может быть измерен по окружности произвольного радиуса.

Длина дуги окружности, которую занимает зуб, — толщина зуба, длина дуги окружности, занимаемая впадиной, — ширина впадины.

Введем обозначения:

R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей;

h_1 и h_2 — соответственно высота головки и высота ножки зуба;
 R_{e_1} и R_{e_2} — радиусы окружностей выступов;
 R_{i_1} и R_{i_2} — радиусы окружностей впадин;
 a_1 и a_2 — соответственно толщина зуба и ширина впадины по начальной окружности;
 t_n — шаг зацепления по начальной окружности;
 z_1 и z_2 — числа зубьев зубчатых колес.

Из принятых определений следует $a_1 + a_2 = t_n$. Шаг по начальным окружностям обоих зубчатых колес одинаков. Для начальных окружностей толщина зуба колеса 1 равна ширине впадины колеса 2, а

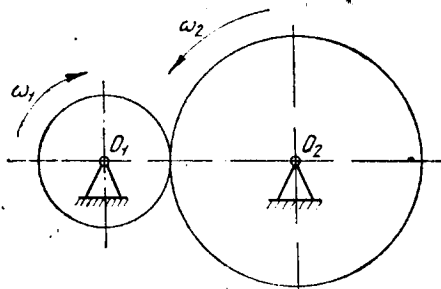


Рис. 66.

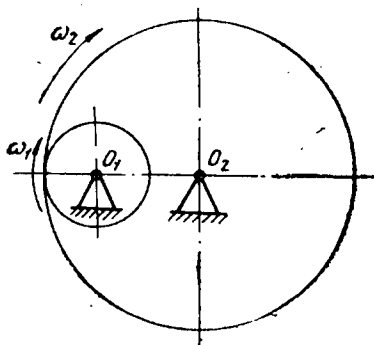


Рис. 67.

толщина зуба колеса 2 равна ширине впадины колеса 1 при отсутствии бокового зазора в зацеплении.

Для зубчатых колес $2\pi R_1 = z_1 t_n$ и $2\pi R_2 = z_2 t_n$. Из этих равенств получим $\frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}$. Учитывая уже известное выражение для передаточного отношения, имеем

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Длина дуги произвольной окружности с радиусом R_{1k} равна $2\pi R_{1k} = z_1 t_{1k}$, откуда $2R_{1k} = z_1 \frac{t_{1k}}{\pi}$. Обозначим $\frac{t_{1k}}{\pi} = m_{1k}$ и назовем модулем зацепления. Следовательно, у зубчатого колеса может быть бесчисленное множество модулей. Обычно принято все параметры зубчатых колес и зацепления выражать через модуль, который соответствует ГОСТу. Такой модуль зубчатых колес, находящихся в зацеплении, будет только один. Окружности зубчатых колес, для которых модуль соответствует ГОСТу, называются делительными окружностями. Радиусы этих окружностей равны

$$R_{d_1} = \frac{mz_1}{2} \text{ и } R_{d_2} = \frac{mz_2}{2},$$

где m — модуль зацепления, соответствующий ГОСТу. Взяв отношение радиусов делительных окружностей, получим

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_{д2}}{R_{д1}} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (58)$$

При определении передаточного отношения зубчатых механизмов обычно учитывается его знак, который показывает, в какую сторону вращается ведомое зубчатое колесо по отношению к ведущему. Если ведомое и ведущее колеса вращаются в одну сторону, то знак передаточного отношения принимается положительным, если в разные — отрицательным. Следовательно, для внешнего зубчатого зацепления (рис. 66) $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}$, а для внутреннего (рис. 67)

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

§ 14. Зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес

Зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес, называются редукторами. Определим передаточное отношение одного такого механизма.

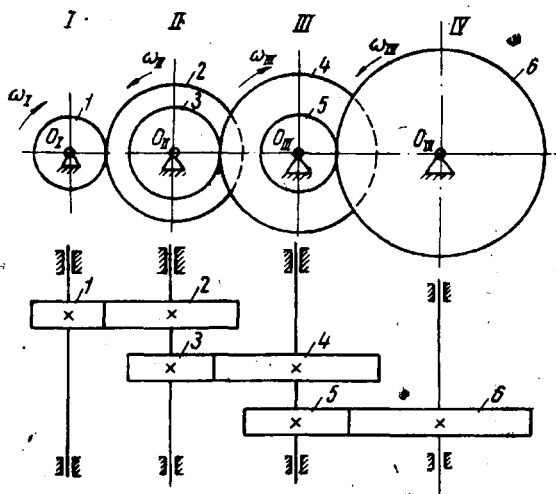


Рис. 68.

Общее передаточное отношение механизма (рис. 68). Запишем передаточные отношения отдельных зубчатых пар, составляющих весь механизм:

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_{II}} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{3-4} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad i_{5-6} = \frac{\omega_{III}}{\omega_{IV}} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Возьмем произведение этих передаточных отношений:

$$i_{1-2}i_{2-3}i_{3-4}i_{4-5}i_{5-6} = \frac{\omega_I \omega_{II} \omega_{III}}{\omega_{II} \omega_{III} \omega_{IV}} = \frac{\omega_I}{\omega_{IV}},$$

но

$$\frac{\omega_I}{\omega_{IV}} = i_{1-6}.$$

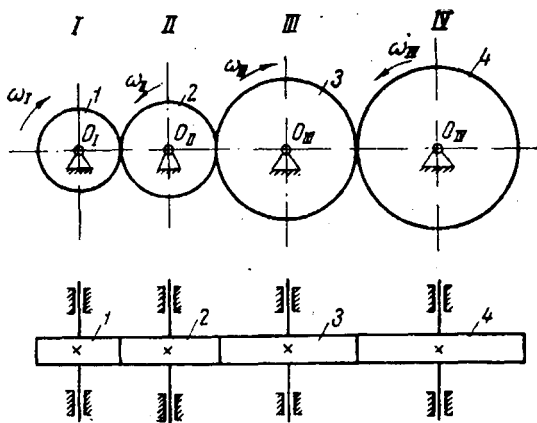


Рис. 69.

Следовательно,

$$i_{1-6} = \frac{\omega_I}{\omega_{IV}} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \left(-\frac{z_6}{z_5}\right), \quad (59)$$

т. е. передаточное отношение механизма, состоящего из нескольких пар зубчатых колес, равно произведению передаточных отношений отдельных зубчатых пар, составляющих механизм.

Передаточное отношение механизма, состоящего из нескольких последовательно соединенных зубчатых колес (рис. 69),

$$i_{1-6} = \frac{\omega_I}{\omega_{IV}} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}. \quad (60)$$

Из этого выражения видно, что промежуточные колеса 2 и 3 не оказывают влияния на величину передаточного отношения. Однако количество промежуточных колес будет определять знак передаточного отношения. Такие колеса называются паразитными зубчатыми колесами. Они используются для получения соответствующего знака передаточного отношения и для передачи движения между осями, расположенными на заданном значительном расстоя-

нии друг от друга. На рис. 70, а, б показано, что использование паразитных зубчатых колес в этом случае даст возможность уменьшить габариты, а следовательно, и вес всего зубчатого механизма.

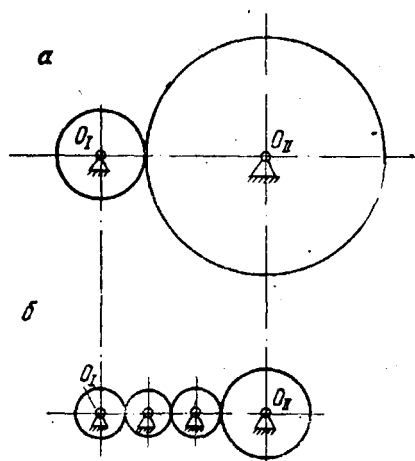


Рис. 70.

Если механизм состоит из нескольких конических зубчатых колес, то при определении знака передаточного отношения уже нельзя руководствоваться только тем, что внешнее зацепление имеет знак минус, а внутреннее — знак плюс. На знак передаточного отношения в таких механизмах оказывает влияние и взаимное расположение зубчатых колес. На рис. 71, а, б видно, что изменение положения колеса 3 приводит к изменению знака передаточного отношения. Действительно, для механизма, изображенного на рис. 71, а

$$i_{1-4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3},$$

а на рис. 71, б

$$i_{1-4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3},$$

так как в первом случае колеса 1 и 4 вращаются в одну сторону, а во втором — в противоположные.

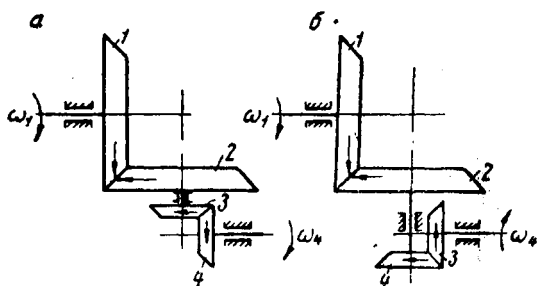


Рис. 71.

Для определения знака передаточного отношения таких механизмов на зубчатом колесе 1 около линии контакта колес (см. рис. 71, а) наносят стрелку — вектор окружной скорости одной из точек начального конуса колеса. Если эту стрелку направить к линии контакта колес, то стрелка на колесе 2 также будет направлена к ли-

нии контакта колес. Так как колеса 2 и 3 жестко связаны между собой, они вращаются в одну сторону и стрелка на колесе 3 имеет то же самое направление, что и на колесе 2. Стрелка на колесе 3 направлена от линии контакта колес 3 и 4, поэтому и на колесе 4 стрелка направляется тоже от линии контакта. Знак общего передаточного отношения для механизма, изображенного на рис. 71, а, положительный, так как стрелки на колесах 1 и 4 имеют одинаковое направление, и отрицательный для механизма, изображенного на рис. 71, б, так как стрелки на этих колесах направлены в противоположные стороны.

Этим методом можно пользоваться также и при определении знака передаточного отношения в случаях, когда механизм состоит только из цилиндрических колес или цилиндрических и конических.

§ 15. Дифференциальные и планетарные зубчатые механизмы

К дифференциальным и планетарным зубчатым механизмам относятся такие механизмы, у которых имеются зубчатые колеса с подвижными осями (рис. 72). Если число степеней подвижности таких механизмов равно единице, то они называются планетарными, если двум и более — дифференциальными.

Число степеней подвижности механизма, приведенного на рис. 72, находим по формуле П. Л. Чебышева $W = 3n - 2p_5 - p_4$. Здесь $n = 3$, $p_5 = 3$, $p_4 = 1$ и $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$.

Следовательно, механизм будет дифференциальным. В данном механизме два независимых закона движения, т. е. двум звеньям (например, 1 и 3) можно задать произвольные законы движения, тогда звено 2 будет двигаться по определенному закону.

Зубчатое колесо 1, ось которого неподвижна, называется центральным колесом, колесо 2, имеющее подвижную ось, — сателлитом, а звено 3, несущее зубчатое колесо с подвижной осью, — водилом. Передаточное отношение в таких механизмах можно определить, используя метод обращенного движения. Для этого всему механизму (см. рис. 72) придаем угловую скорость, равную угловой скорости водила, но направленную в противоположную сторону. Это не изменит относительного движения звеньев, абсолютные же скорости будут другими, что показано ниже:

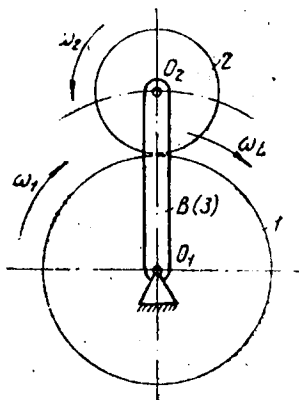


Рис. 72.

Звено	1	2	3
Скорость звена	ω_1	ω_2	ω_B
Скорость при обратном движении	$\omega_1 - \omega_B$	$\omega_2 - \omega_B$	$\omega_B - \omega_B = 0$

Угловая скорость водила будет равна нулю, и в механизме уже не будет зубчатых колес с подвижными осями, т. е. механизм из дифференциального превращается в обычный, для которого справедливо отношение:

$$\frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_2 - \omega_B} = -\frac{z_2}{z_1}$$

Для планетарного механизма $\omega_1 = 0$, следовательно,

$$\frac{0 - \omega_B}{\omega_2 - \omega_B} = -\frac{z_2}{z_1},$$

откуда

$$i_{2-B} = \frac{\omega_2}{\omega_B} = 1 + \frac{z_1}{z_2} \quad (61)$$

Для дифференциального механизма, состоящего из n зубчатых колес,

$$\frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_n - \omega_B} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \dots \left(-\frac{z_n}{z_{n-1}}\right). \quad (62)$$

Из этих выражений находим неизвестное передаточное отношение и угловую скорость звена механизма.

Пример. Для планетарного механизма (рис. 73) при известных значениях z_1, z_2, z_2' и z_3 определить передаточное отношение i_{1-B} . Придавая механизму обратное движение, можем записать:

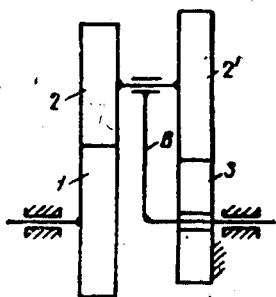


Рис. 73.

$$\frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_3 - \omega_B} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right).$$

Так как $\omega_3 = 0$, т. е. колесо 3 неподвижно, имеем:

$$\frac{\omega_1 - \omega_B}{-\omega_B} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} \quad \text{и} \quad i_{1-B} = \frac{\omega_1}{\omega_B} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}.$$

Принимая численные значения $z_1 = z_2' = 100$; $z_2 = 99$; $z_3 = 101$, получим $i_{1-B} = \frac{1}{10000}$. В таком механизме возможна передача движения только

от водила к колесу 1. Ведущим колесо 1 не может быть, так как в этом случае механизм будет самотормозящим (см. гл. VI и VII).

Дифференциальные и планетарные механизмы обладают тем достоинством, сравнительно с обычными зубчатыми механизмами, что могут иметь значительно меньшие габариты, а следовательно, и вес, так как число сателлитов (см. рис. 72) может быть большим, а усилие, передаваемое одним зацеплением, малым.

В дифференциальных механизмах может быть два ведущих звена. Поэтому в таком механизме можно останавливать одно из ведущих звеньев, вращать ведущие звенья в одну или в противоположные стороны. В результате ведомое звено будет иметь четыре различных скорости.

Условия синтеза дифференциальных и планетарных механизмов. При назначении чисел зубьев колес создаваемых дифференциальных и планетарных механизмов следует соблюдать определенные условия. Установим эти условия.

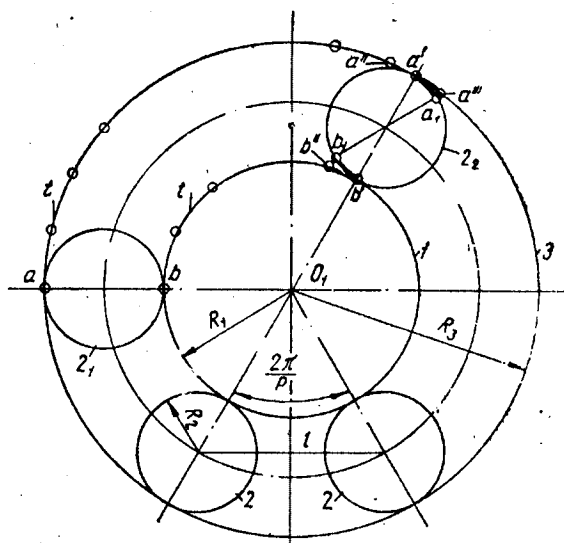


Рис. 74.

Для дифференциального зубчатого механизма (рис. 74) $R_3 = R_1 + 2R_2$. Полагая, что начальные и делительные окружности совпадают, получим: $\frac{mz_3}{2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{2mz_2}{2}$, откуда $z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}$. Это условие носит название условия соосности. Из него следует, что числа зубьев центральных колес 1 и 3 должны быть либо оба четные, либо оба нечетные. Только в этом случае z_2 будет целым числом.

При сборке дифференциального зубчатого механизма, имеющего несколько сателлитов, зубья этих сателлитов должны полностью совпадать со впадинами центральных колес 1 и 3 (см. рис. 74). Найдём условие, при котором это будет соблюдаться. Это условие носит название условия сборки. Одно из зубчатых колес сателлитов (колесо 2₁) полагаем введенным в зацепление, начальные окружности контактируют в точках a и b. По начальным окружностям колес 1 и 3 от точек a и b отложим шаг зацепления в направле-

нии колеса 2_2 . В общем случае шаг на $\bar{a}\bar{a}'$ и $\bar{b}\bar{b}'$ не уложится целое число раз. Поэтому $\bar{a}'\bar{a}'' < t$ и $\bar{b}'\bar{b}'' < t$. От точки a' отложим дуги $a'\bar{a}''' = t - \bar{a}'\bar{a}''$ и $a'\bar{a}_1 = t - \bar{a}'\bar{a}''$ и проведем диаметр a_1b_1 . При перекатывании начальных окружностей в процессе зацепления колес точка a_1 попадает в точку a' . Зубчатое колесо 2_2 можно ввести в зацепление, если оно после этого окажется в тех же самых условиях зацепления, что и колесо 2_1 . Для этого необходимо, чтобы точка b_1 попала в точку b' , т. е. чтобы $\bar{b}_1\bar{b}' = \bar{b}'\bar{b}''$. Из чертежа следует, что $\bar{a}'\bar{a}_1 = \bar{b}'\bar{b}_1$. Следовательно, $t - \bar{a}'\bar{a}'' = \bar{b}'\bar{b}''$ или $\bar{a}'\bar{a}'' + \bar{b}'\bar{b}'' = t$.

Обозначим через p число сателлитов, тогда

$$\bar{a}\bar{a}' = \frac{z_3 t}{p} = k_1 t + \bar{a}'\bar{a}'' \quad \text{и} \quad \bar{b}\bar{b}' = \frac{z_1 t}{p} = k_2 t + \bar{b}'\bar{b}'' ,$$

где k_1 и k_2 — целые числа.

Суммируя, получим

$$\frac{z_3 t}{p} + \frac{z_1 t}{p} = (k_1 + k_2) t + \bar{a}'\bar{a}'' + \bar{b}'\bar{b}'' = (k_1 + k_2) t + t = kt ,$$

где k — целое число.

Следовательно, $\frac{z_1 + z_3}{p} = k$, т. е. сумма чисел зубьев центральных колес должна быть кратна числу сателлитов.

Следующим условием синтеза планетарных и дифференциальных передач является условие соседства. При сборке соседние зубчатые колеса 2 не должны задевать друг друга, т. е. находиться на таком расстоянии, чтобы выполнялось условие $l > 2R_e$. Из рис. 74

имеем $\frac{l}{2} = (R_1 + R_2) \sin \frac{\pi}{p}$, тогда условие соседства примет вид $(R_1 + R_2) \sin \frac{\pi}{p} > R_e$.

§ 16. Основной закон зацепления (теорема Виллиса)

Для очертания боковых профилей зубьев можно использовать различные взаимноогibaемые кривые. Однако произвольно они выбраны быть не могут. Установим условия, которым должны удовлетворять боковые профили зубьев.

Изобразим соприкасающиеся в точке A два профиля 1 и 2 , которые передают вращательное движение относительно осей O_1 и O_2 (рис. 75). Угловые скорости ω_1 и ω_2 заданы, передаточное отношение $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P_0}{O_1 P_0}$, где P_0 — мгновенный центр относительного вращения.

Относительная скорость v_{12} точки A , принадлежащей профилю 1, направлена \perp отрезку AP_0 . Через точку A проведем общую нормаль NN к кривым 1 и 2, которая пересечет линию центров O_1O_2 в неизвестной точке P . Проекция относительной скорости v_{12} на направление нормали NN должна быть равна нулю, так как в противном случае профили 1 и 2 либо не будут соприкасаться — разойдутся, либо будут внедряться друг в друга в зависимости от направления v_{12} . Передача движения в обоих случаях невозможна. Но это означает, что $v_{12} \perp NN$. Следовательно, линия NN совпадает с линией AP_0 , т. е. пройдет не через произвольную точку P , а через точку P_0 .

Таким образом, общая нормаль в точке касания двух взаимноогibaемых кривых (профилей), передающих движение с заданным передаточным отношением, проходит через мгновенный центр вращения в относительном движении и делит расстояние между центрами вращения в абсолютном движении на части, обратно пропорциональные угловым скоростям. Это основной закон зацепления (теорема Виллиса), которому должны удовлетворять боковые профили зубьев.

Из многих взаимноогibaемых кривых, удовлетворяющих основному закону зацепления, для очертания боковых профилей зубьев выбираются только те, которые сравнительно просто изготовить и которые позволяют получить работоспособное зацепление. Наибольшее распространение получили эвольвентные, циклоидальные и круговые профили. В настоящее время подавляющее большинство зубчатых колес имеют зубья с эвольвентным профилем. Такие профили несложно изготовить. Кроме того, зубчатое эвольвентное зацепление практически не чувствительно к изменению межосевого расстояния, что имеет большое значение при изготовлении и сборке зубчатых передач, так как не требует точного соблюдения межосевого расстояния в определенных допустимых пределах.

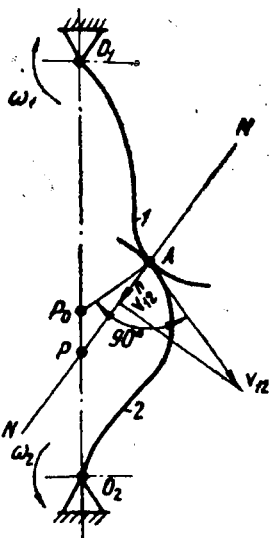


Рис. 75.

§ 17. Теория эвольвентного зацепления

Эвольвента и ее свойства. Для построения эвольвенты изобразим окружность произвольного радиуса OA (рис. 76). В точке A окружности проведем касательную прямую AB . От точки A на прямой AB отложим отрезки произвольной величины $\overline{A1} = \overline{12} = \overline{23} = \dots$

На окружности от точки A отложим дуги $\tilde{A}1' = \overline{A}1, \overset{\sim}{1}'2' = \overline{1}2, \dots$. Прямую AB будем катить без скольжения по окружности, тогда каждая точка прямой AB будет описывать эвольвенту.

• Из условий образования эвольвенты можно установить следующие ее свойства.

1. Касательная к окружности является нормалью в соответствующей точке эвольвенты. Длина нормали равна радиусу кривизны эвольвенты и соответствующей дуге окружности.

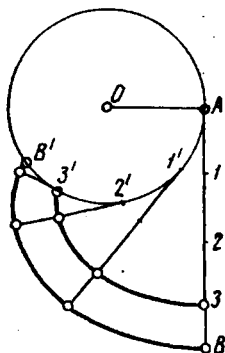


Рис. 76.

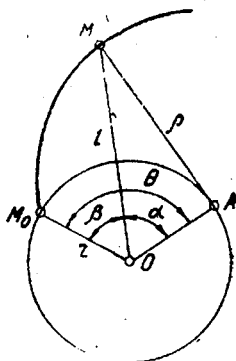


Рис. 77.

2. Эвольвенты, образованные различными точками образующей прямой AB , представляют собой эквидистантные кривые — равностоящие по нормали.

3. Эвольвенты, образованные на данной окружности, при наложении совпадают, т. е. представляют собой различные участки одной и той же эвольвенты. Следовательно, эвольвента полностью определяется окружностью, которой она образована.

Уравнение эвольвенты. На эвольвенте, образованной на окружности с радиусом r (рис. 77), положение точки M определяется радиусом-вектором $\overline{OM} = l$ и углом β .

Из точки M проведем касательную $\overline{AM} = \rho$ к окружности. Положение радиуса OA определяется углом α . Из рисунка $\beta = \theta - \alpha$, но $\theta = \frac{\overset{\sim}{AM}_0}{r}$. Из свойств эвольвенты $\overset{\sim}{AM}_0 = \overline{AM}$, тогда

$$\theta = \frac{\overline{AM}}{r} = \text{tg } \alpha \text{ и } \beta = \text{tg } \alpha - \alpha. \quad (63)$$

Радиус-вектор $l = \frac{r}{\cos \alpha}$. Таким образом, для окружности с радиусом r параметры эвольвенты β и l полностью определяются

углом α . Уравнение (63) есть уравнение эвольвенты. Его принято записывать следующим образом:

$$\beta = \text{inv } \alpha \quad (\beta\text{-инволюта } \alpha). \quad (64)$$

Эта функция используется при вычислении параметров зубчатого зацепления. Имеются специальные таблицы ее численных значений.

Внешнее эвольвентное зацепление цилиндрических зубчатых колес имеет место в том случае, когда начальные окружности касаются внешним образом. Для построения эвольвентного зубчатого зацепления полагаем известным R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей; R_{e_1} и R_{e_2} — радиусы окружностей выступов; R_{i_1} и R_{i_2} — радиусы окружностей впадин; t_n — шаг зацепления по начальным окружностям; a_1 и a_2 — толщину зуба и ширину впадины по начальным окружностям; α — угол зацепления. Понятие об угле зацепления будет дано несколько позже.

Отложим межцентровое расстояние $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$ (рис. 78) и изобразим начальные окружности, соприкасающиеся в точке P_0 . Через эту точку проведем прямую $t-t \perp \overline{O_1O_2}$. Затем под углом α к прямой $t-t$ проведем прямую NN , на которую из центров O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1A и O_2B . Радиусами $r_1 = \overline{O_1A}$ и $r_2 = \overline{O_2B}$ из центров O_1 и O_2 проведем две окружности, которые носят название основных окружностей. На прямой NN на отрезке AB возьмем произвольную точку K .

Если прямую NN катить без скольжения по первой, а затем по второй основным окружностям, то точка K прямой NN опишет вначале эвольвенту 1, а затем эвольвенту 2, которые и примем за боковые профили зубьев зубчатых колес.

Радиусами R_{e_1} , R_{e_2} и R_{i_1} , R_{i_2} проведем окружности выступов и впадин, ограничивающие соответственно головки и ножки зубьев. Переход эвольвентного профиля зуба в окружность впадин должен быть плавным по окружности со стандартным радиусом $r = 0,25 m$. Затем откладываем по начальной окружности толщину зуба 1-го колеса и толщину зуба 2-го колеса, которая равна ширине впадины зуба 1-го колеса. Строим обычным путем симметричные профили. Точки пересечения окружностей выступов и линии NN обозначим через a и b .

Покажем, что эвольвенты удовлетворяют основному закону зацепления. В соответствии с основным законом зацепления общая нормаль к профилям зубьев должна проходить через точку P_0 . Линия NN , являясь касательной к основным окружностям, на которых образованы эвольвенты, проходит через точку P_0 и является общей нормалью к эвольвентам в точке их касания K . Как-либо по-другому общая нормаль к эвольвентам не может пройти, так как она обязательно (см. свойства эвольвенты) должна касаться основных ок-

ружностей. Следовательно, эвольвенты удовлетворяют основному закону зацепления.

Точка K контакта зубьев располагается на линии NN . Так как эта точка принята произвольной, линия NN , связанная с неподвижной плоскостью, представляет собой геометрическое место точек

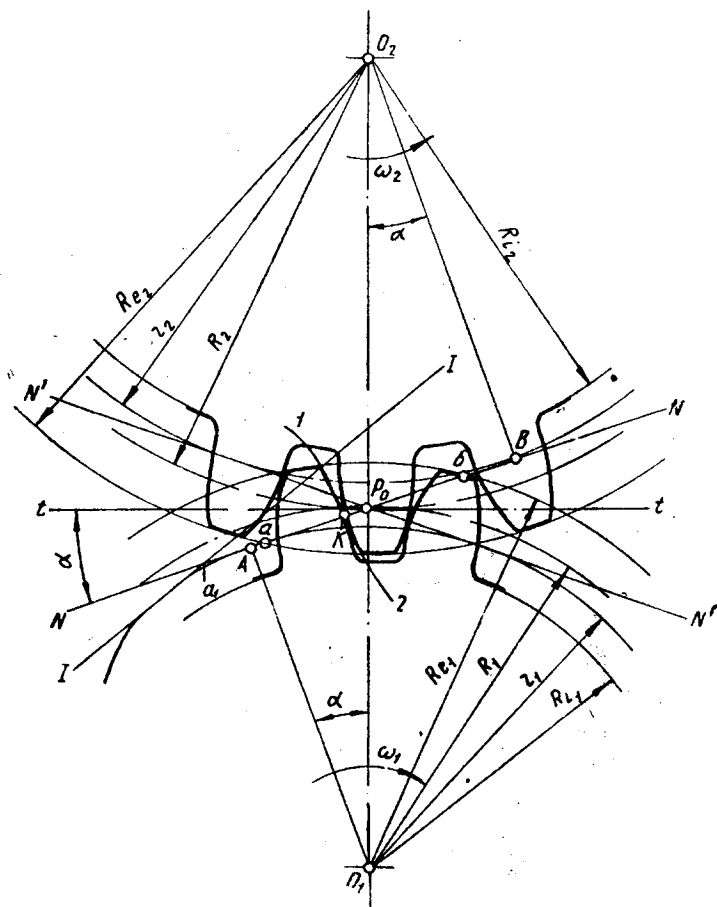


Рис. 78.

контакта зубьев — линию зацепления. Вне этой линии зубья не контактируют.

Рассмотрим процесс зацепления пары зубьев и установим границы линии зацепления. Если расположить зуб первого колеса так, что его профиль будет проходить через точку a , то у контактирующего с ним зуба второго колеса эвольвента в точке a будет располагаться своей верхней точкой, которая первой попадет на линию NN .

Следовательно, на линии NN точка a будет началом зацепления. Дальнейшее перемещение точки контакта зубьев по линии зацепления будет происходить до точки b , после которой зацепление будет невозможно, так как эвольвента зуба первого колеса уходит с линии зацепления. Таким образом, зацепление пары зубьев будет про-

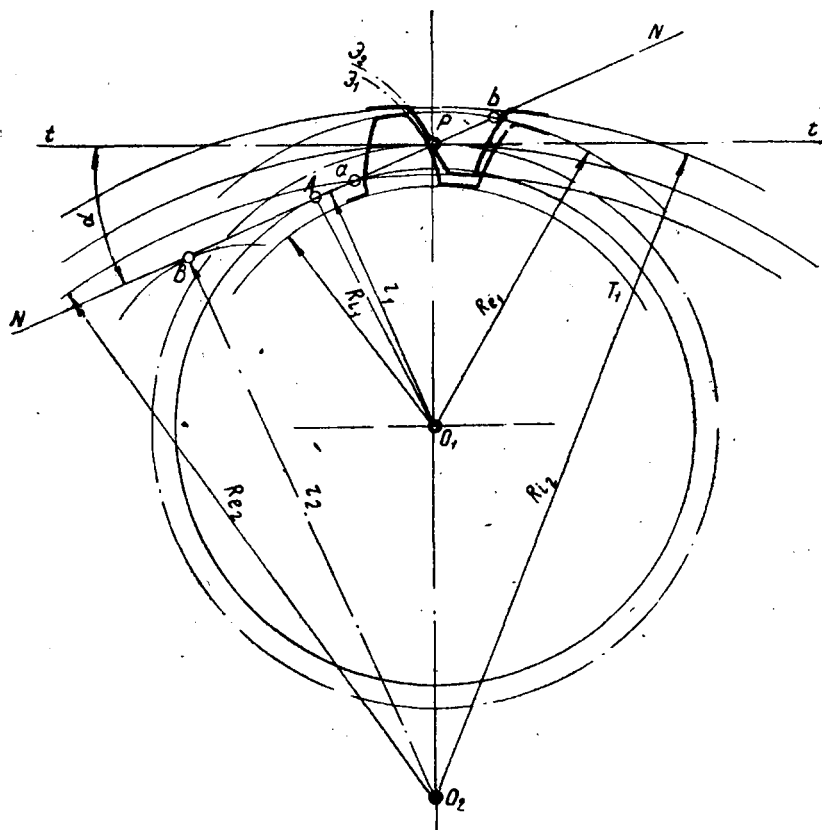


Рис. 79.

исходить в пределах линии \overline{ab} , которая называется практической линией зацепления.

Линия AB называется теоретической линией зацепления. Это есть предел практической линии зацепления. Изменяя параметры зубчатого зацепления (например, радиусы R_{e1} и R_{e2}), можно удлинить линию \overline{ab} , при этом точки a и b не могут располагаться соответственно за точками A и B . Действительно, если предположить, что точка a заняла положение a_1 (см. рис. 78), то нормаль к эвольвенте будет касательной $I-I$ к основной окружно-

сти и уже не пройдет через точку P_0 , т. е. за пределами точки A не удовлетворяется основной закон зацеплений. Аналогичное будет и за точкой B . Рабочие участки зубьев — это участки их профилей, точки которых в процессе зацепления контактируют, передавая движение.

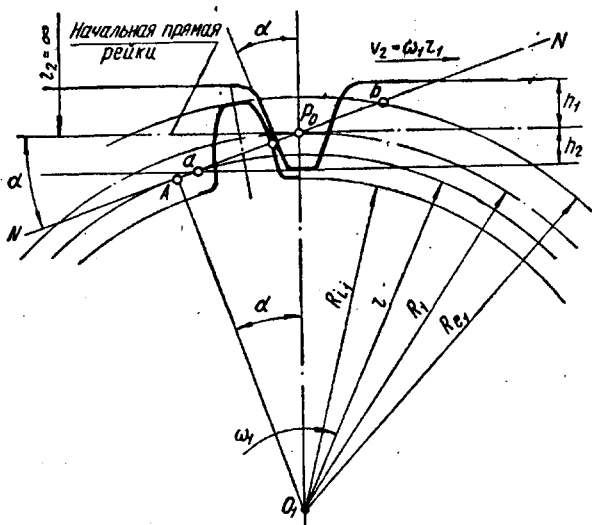


Рис. 80.

Внутреннее зубчатое зацепление (рис. 79) строится аналогично внешнему. Следует обратить внимание на то, что зуб большого колеса имеет вогнутый профиль.

Реечное зацепление (рис. 80) предназначено для преобразования вращательного движения зубчатого колеса в поступательное движение зубчатой рейки (возможно и обратное). Профиль зуба рейки прямолинеен. Это несложно представить, если рассматривать реечное зацепление как предел, с одной стороны, внешнего зацепления, а с другой, — внутреннего. Следовательно, и профиль зуба рейки будет являться, с одной стороны, пределом выпуклого профиля, а с другой — вогнутого.

§ 18. Способы изготовления зубчатых колес

Существует два основных способа изготовления зубчатых колес: способ копирования и способ огибания (обкатки).

Способ копирования заключается в том, что инструменту придается форма впадины зуба (рис. 81). При рабочем движении инструмента удаляется материал зубчатого колеса, заключенный во впа-

дине. Повторяя эту операцию в соответствии с количеством зубьев, получаем зубчатое колесо.

При изготовлении зубчатого колеса способом огибания применяется инструмент (рис. 82), имеющий форму зубчатого колеса. Ему придается возвратно-поступательное движение вдоль оси. Постепенно оси заготовки и инструмента сближаются до врезания на полную глубину зуба. Затем инструменту и заготовке дается такое относительное движение, какое бы имели два зубчатых колеса, находящихся в зацеплении. В результате часть материала заготовки, мешающая зацеплению, удаляется и образуется зубчатое колесо.

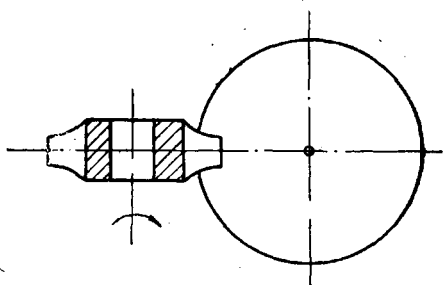


Рис. 81.

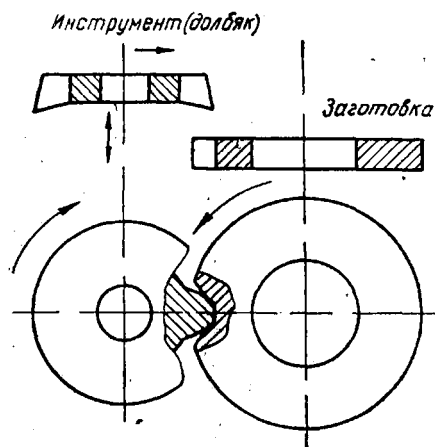


Рис. 82.

Вместо зубчатого колеса в качестве инструмента может быть использована зубчатая рейка. Инструментальная стандартная зубчатая рейка (рис. 83), применяемая для нарезания зубчатых колес, имеет размеры, которые выражаются через модуль. Прямая, делящая зуб рейки по высоте пополам, называется модульной прямой (МП). Для стандартной рейки $f=1$; $c=0,25$; $\alpha_0=20^\circ$. Отличительной особенностью рейки является постоянство шага на любой ее прямой.

При нарезании зубьев зубчатого колеса его делительная окружность и МП инструментальной рейки могут иметь различное взаимное расположение. Смещение МП относительно делительной окружности — абсолютный сдвиг обычно выражается в долях модуля $x=\xi t$. Здесь ξ — относительный сдвиг нарезающего инструмента (рис. 84).

Возможны три случая относительного расположения МП и делительной окружности.

1. МП располагается на расстоянии от оси колеса, большем R_d (рис. 84, а), $\xi > 0$. Зубчатые колеса, изготовленные при этом условии, называются положительными.

2. МП касается делительной окружности (рис. 84, б) $\xi = 0$. Зубчатые колеса — нулевые.

3. МП располагается на расстоянии от оси колеса, меньшем R_d (рис. 84, в), $\xi < 0$. Зубчатые колеса — отрицательные.

Во всех случаях делительная окружность и прямая зубчатой рейки, касательная к ней, перекатываются друг по другу без скольжения. Следовательно, делительная окружность является начальной при изготовлении зубчатого колеса.

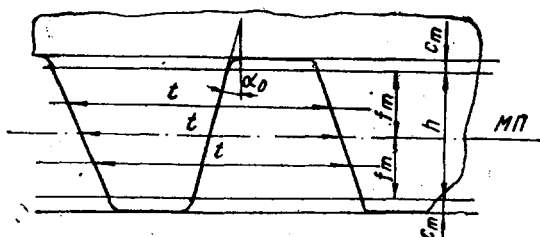


Рис. 83.

В зацепление можно вводить зубчатые колеса, изготовленные с различными сдвигами нарезающего инструмента.

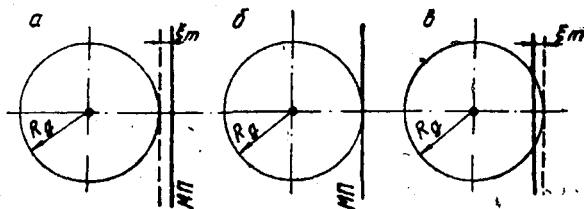


Рис. 84.

Возможны следующие сочетания:

1. $\xi_c = \xi_1 + \xi_2 > 0$ — положительное зацепление.
2. $\xi_c = \xi_1 + \xi_2 = 0$ — нулевое зацепление.
3. $\xi_c = \xi_1 + \xi_2 < 0$ — отрицательное зацепление.

§ 19. Параметры зубчатого зацепления и зубчатых колес, изготовленных со сдвигом нарезающего инструмента

Толщина зуба колеса на делительной окружности. На МП толщина зуба равна $\frac{\pi m}{2}$. Этой же величине будет равна толщина зуба колеса на делительной окружности при отсутствии сдвига.

При сдвиге нарезающего инструмента (рейки) на величину ξm толщина зуба увеличивается на 2Δ (рис. 85). Следовательно,

$$a_d = \frac{\pi m}{2} + 2\Delta,$$

но $\Delta = \xi m \operatorname{tg} \alpha_0$, поэтому

$$a_d = \frac{\pi m}{2} + 2\xi m \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (65)$$

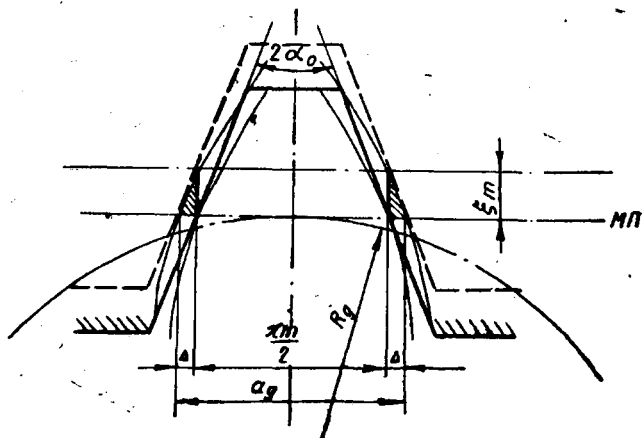


Рис. 85.

В этом выражении, как и во всех последующих, ξ является алгебраическим членом. При численных расчетах принимается соответствующий знак.

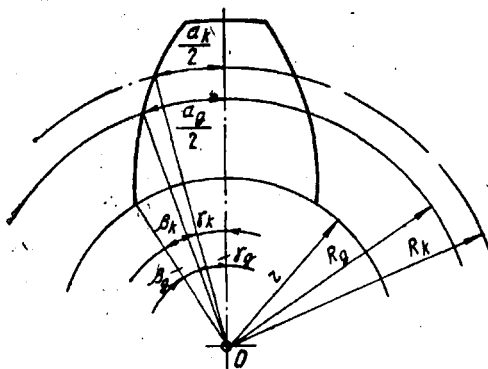


Рис. 86.

Толщина зуба колеса a_k на окружности произвольного радиуса R_k . Из рис. 86 имеем $\beta_k + \gamma_k = \beta_d + \gamma_d$, но

$$\beta_d = \operatorname{inv} \alpha_0; \quad \beta_k = \operatorname{inv} \alpha_k; \quad \gamma_k = \frac{a_k}{2R_k}; \quad \gamma_d = \frac{a_d}{2R_d}.$$

Подставляя значения величин в исходное уравнение, после несложных преобразований получим

$$a_k = 2R_k \left(\frac{a_k}{2R_d} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_k \right), \quad (66)$$

где $\cos \alpha_k = \frac{r}{R_k}$ (см. уравнение эвольвенты);

r — радиус основной окружности.

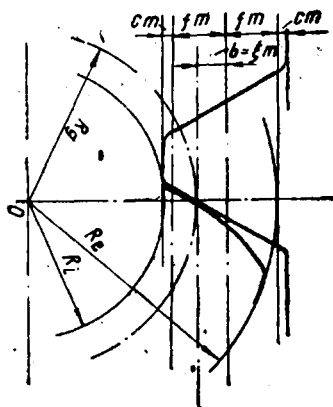


Рис. 87.

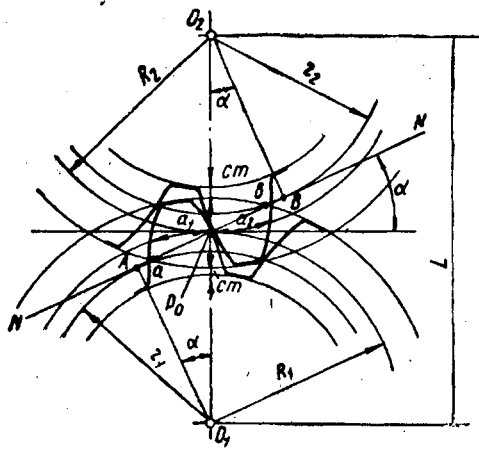


Рис. 88.

Радиусы окружностей выступов и впадин зубчатого колеса. Из рис. 87 имеем:

$$R_e = R_d + \xi m + fm; \quad (67)$$

$$R_i = R_d + \xi m - fm - cm. \quad (68)$$

Угол зацепления и межцентровое расстояние пары зубчатых колес. Для беззазорного зубчатого зацепления, т. е. когда зуб первого колеса полностью вписывается во впадину второго колеса (и наоборот), $a_1 + a_2 = t_n$ (рис. 88), так как толщина зуба колеса по начальной окружности равна ширине впадины зуба зацепляющегося с ним зубчатого колеса.

Используя ранее полученные выражения, имеем:

$$a_1 = 2R_1 \left(\frac{a_{d_1}}{2R_{d_1}} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha \right);$$

$$a_2 = 2R_2 \left(\frac{a_{d_2}}{2R_{d_2}} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha \right);$$

$$t_n = \frac{2\pi R_1}{z_1} = \frac{2\pi R_2}{z_2}; \quad R_{д1} = \frac{mz_1}{2}; \quad R_{д2} = \frac{mz_2}{2};$$

$$a_{д1} = \frac{\pi m}{2} + 2\xi_1 m \operatorname{tg} \alpha_0; \quad a_{д2} = \frac{\pi m}{2} + 2\xi_2 m \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Подставляя значение величин в исходное выражение, после несложных преобразований получим:

$$\operatorname{inv} \alpha = \frac{2(\xi_1 + \xi_2)}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_0. \quad (69)$$

Межцентровое расстояние (см. рис. 88) $L = O_1P_0 + O_2P_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos \alpha}$.

Обозначим через L_0 межцентровое расстояние для случая $\alpha = \alpha_0$, когда начальные окружности совпадают с делительными

$$L_0 = R_{д1} + R_{д2} = \frac{r_1 + r_2}{\cos \alpha_0} = \frac{m}{2} (z_1 + z_2),$$

тогда

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad L = L_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}. \quad (70)$$

§ 20. Относительное скольжение эвольвентных профилей зубьев

Боковые профили зубьев зубчатых колес представляют собой взаимноогibaемые кривые, т. е. передают движение от одного про-

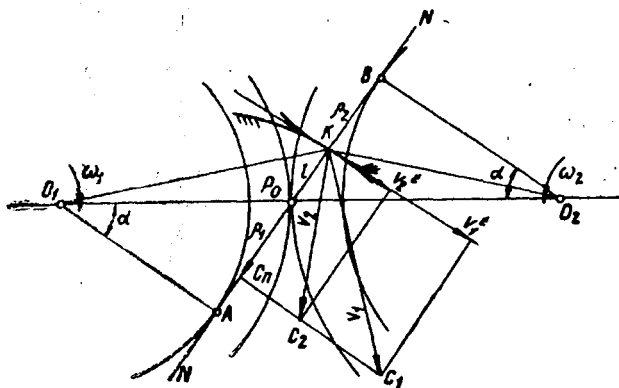


Рис. 89.

филя другому при качении и при скольжении друг по другу. Величина относительной скорости скольжения наряду с другими факто-

рами определяет потери мощности на трение скольжения и износ зубчатого зацепления.

Для оценки качества зубчатого зацепления пользуются понятием удельного скольжения (коэффициента удельного скольжения).

Для нахождения удельного скольжения рассмотрим пару зубчатых колес (рис. 89), зубья которых в рассматриваемый момент времени копируются в произвольной точке K . Окружные скорости точки K ,

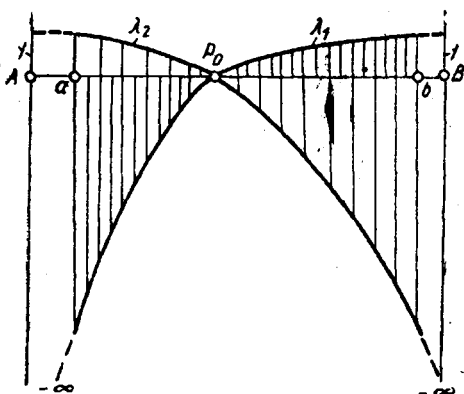


Рис. 90.

принадлежащей обоим профилям, $v_1 = \omega_1 (O_1K)$ и $v_2 = \omega_2 (O_2K)$. Проекции этих скоростей равны между собой в соответствии с основным законом зацепления, проекции же скоростей v_1^t и v_2^t на направление касательной к профилям различны (кроме точки K , совпадающей с точкой P_0)

$$v_1^t = \omega_1 \rho_1; \quad v_2^t = \omega_2 \rho_2,$$

где $\rho_1 = AK$ и $\rho_2 = BK$ — радиусы кривизны профилей зубьев.

Скорость скольжения первого профиля по второму $v_{1-2} = v_1^t - v_2^t$, скорость скольжения второго профиля по первому $v_{2-1} = v_2^t - v_1^t$.

Обычно пользуются понятием удельного скольжения $\lambda_1 = \frac{v_{1-2}}{v_1^t}$ и

$\lambda_2 = \frac{v_{2-1}}{v_2^t}$. Подставляя значения скоростей, выраженные через ω и ρ ,

получим $\lambda_1 = 1 - \frac{\rho_2 \omega_2}{\rho_1 \omega_1}$ и $\lambda_2 = 1 - \frac{\rho_1 \omega_1}{\rho_2 \omega_2}$, но $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$. Тогда удельные скольжения на профилях зубьев колес 1 и 2 соответственно будут равны:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\rho_2 z_1}{\rho_1 z_2}; \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\rho_1 z_2}{\rho_2 z_1}. \quad (71)$$

Графическая зависимость λ_1 и λ_2 от положения точки контакта зубьев на линии зацепления показана на рис. 90. Максимальные значения удельных скольжений не должны значительно отличаться друг от друга. Это осуществляется путем изменения положения практической линии зацепления ab на теоретической AB , что достигается соответствующим выбором относительных сдвигов ξ_1 и ξ_2 при изготовлении зубчатых колес.

§ 21. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного без сдвига нарезающего инструмента

В общем случае зацепления зубчатых колес одно колесо будет меньше другого (рис. 91). Рассмотрим такой случай, когда крайняя точка практической линии зацепления b совпадает с крайней точкой теоретической линии зацепления B . Если теперь для малого зубча-

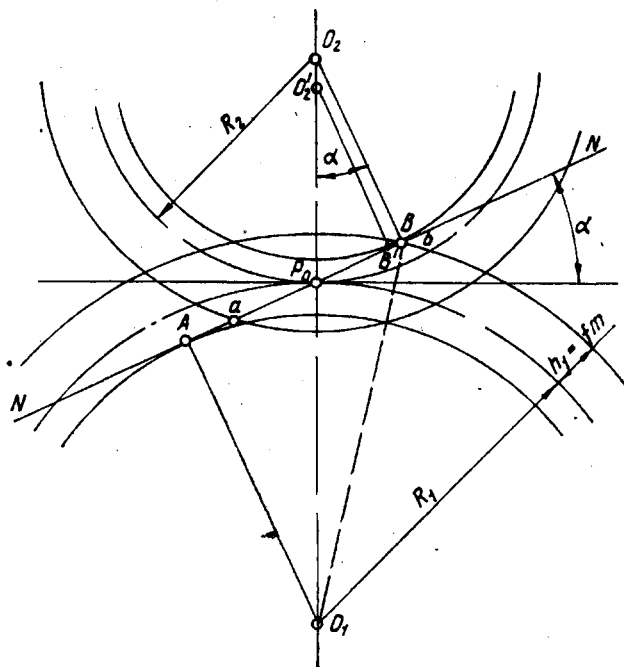


Рис. 91.

того колеса 2 с числом зубьев z_2 принять число зубьев меньше, чем z_2 , при всех прочих равных условиях, то ось колеса сместится в положение O_2' , а точка B в положение B' , т. е. практическая линия зацепления, ограниченная точкой b , выйдет за пределы теоретической линии зацепления. Ранее было показано, что за пределами теоретической линии зацепления зацепление невозможно, так как не удовлетворяется основной закон зацепления. Следовательно, для рассматриваемого случая уменьшать число зубьев на колесе 2 нельзя, т. е. $z_2 = z_{\min}$, где z_{\min} — наименьшее число зубьев на зубчатом колесе. Найдем это число.

Из $\triangle O_1O_2B$ (см. рис. 91) имеем:

$$O_1B^2 = O_1O_2^2 + O_2B^2 - 2(O_1O_2)(O_2B) \cos \alpha, \quad (72)$$

но $O_1B = R_1 + fm$; $O_2B = R_2 \cos \alpha$; $O_1O_2 = R_1 + R_2$, (73)

тогда $(R_1 + fm)^2 = (R_1 + R_2)^2 + R_2^2 \cos^2 \alpha - 2(R_1 + R_2)R_2 \cos^2 \alpha$. (74)

Обозначая $\frac{R_1}{R_2} = i > 1$ и учитывая, что $R_2 = \frac{mz_2}{2}$, после деления левой и правой частей последнего выражения на R_2^2 получим;

$$\left(i + \frac{2f}{z_2}\right)^2 = (i+1)^2 + \cos^2 \alpha - 2(i+1) \cos^2 \alpha. \quad (75)$$

Раскрывая скобки в правой части этого выражения, после несложных преобразований будем иметь:

$$\left(i + \frac{2f}{z_2}\right)^2 = i^2 + (2i+1) \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$z_{\min} = z_2 = \frac{2f}{\sqrt{i^2 + (2i+1) \sin^2 \alpha} - i}, \quad (76)$$

или

$$z_{\min} = 2f \frac{\sqrt{i^2 + (2i+1) \sin^2 \alpha} + i}{(2i+1) \sin^2 \alpha}. \quad (77)$$

Если зацепление колеса 2 происходит с зубчатой рейкой, то $R_1 = \infty$ и $i = \infty$. Тогда, разделив числитель и знаменатель последнего выражения на i , получим:

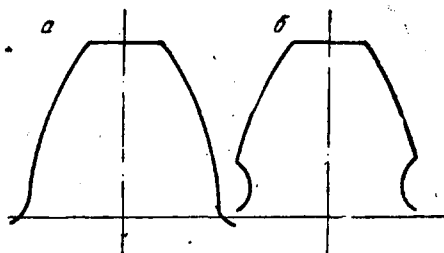


Рис. 92.

$$z_{\min} = 2f \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{i} + \frac{1}{i^2}\right) + 1}}{\left(2 + \frac{1}{i}\right) \sin^2 \alpha}. \quad (78)$$

Подставив в (78) значение $i = \infty$, будем иметь:

$$z_{\min} = \frac{2f}{\sin^2 \alpha}. \quad (79)$$

Если $f=1$, $\alpha=20^\circ$, то $z_{\min}=17$.

В процессе изготовления зубчатого колеса методом огибания удаляется та часть материала колеса, которая мешает зацеплению, т. е. материал, сосредоточенный во впадинах зубьев зубчатых колес. Таким образом, вырисовывается зуб нормальной формы (рис. 92, а).

Если на зубчатом колесе принять число зубьев $z < z_{\min}$, то удалается еще дополнительная часть материала и зуб получается подрезанным (рис. 92, б). Это нежелательно, так как зуб ослабляется.

Практически подрез мало ощутим при $z \geq 14$, поэтому можно принять $z_{\min \text{ пр}} = 14$ (пр. — практическое).

§ 22. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного со сдвигом нарезающего инструмента-рейки

Для получения числа зубьев на зубчатом колесе $z < z_{\min}$ без подреза необходимо осуществить положительный сдвиг нарезающего инструмента. Найдем соотношение между числом зубьев на зубчатом колесе и сдвигом инструмента.

Для зубчатого колеса с осью O_1 и числом зубьев $z = z_{\min}$ линия выступов (рис. 93) инструментальной рейки (за линию выступов принимается прямая, ограничивающая прямолинейную часть зуба рейки) проходит через точку B_1 — крайнюю точку линии зацепления.

У зубчатого колеса, для которого $z < z_{\min}$, ось колеса займет положение O_2 , а крайняя точка линии зацепления — положение B_2 . Для того, чтобы избежать подреза, рейку следует переместить на величину ξm так, чтобы линия выступов рейки прошла через точку B_2 . На отрезке $O_1 P_0$ показаны точки C_1 и C_2 . Треугольники $O_1 B_1 P_0$ и $O_2 B_2 P_0$ будут подобны как треугольники с взаимно-параллельными сторонами. Следовательно,

$$\frac{O_1 P_0}{O_2 P_0} = \frac{C_1 P_0}{C_2 P_0}$$

или

$$\frac{\frac{m z_{\min}}{2}}{\frac{m z}{2}} = \frac{f m}{f m - \xi m}$$

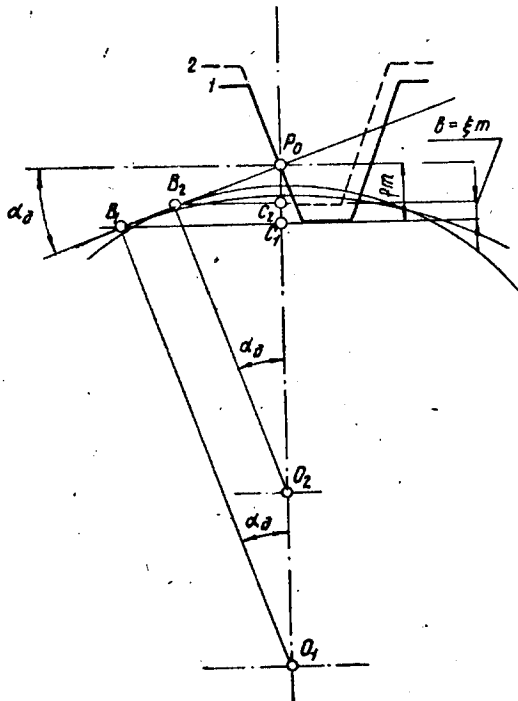


Рис. 93.

откуда

$$z = z_{\min} \left(1 - \frac{\xi}{f} \right) \quad \text{и} \quad \xi = f \frac{z_{\min} - z}{z_{\min}}. \quad (80)$$

При таком относительном сдвиге подреза зубьев не будет.

§ 23. Дуга зацепления. Коэффициент перекрытия

Началом зацепления пары зубьев будет положение, когда эвольвента зуба зубчатого колеса попадает в точку a (рис. 94). Закончи-

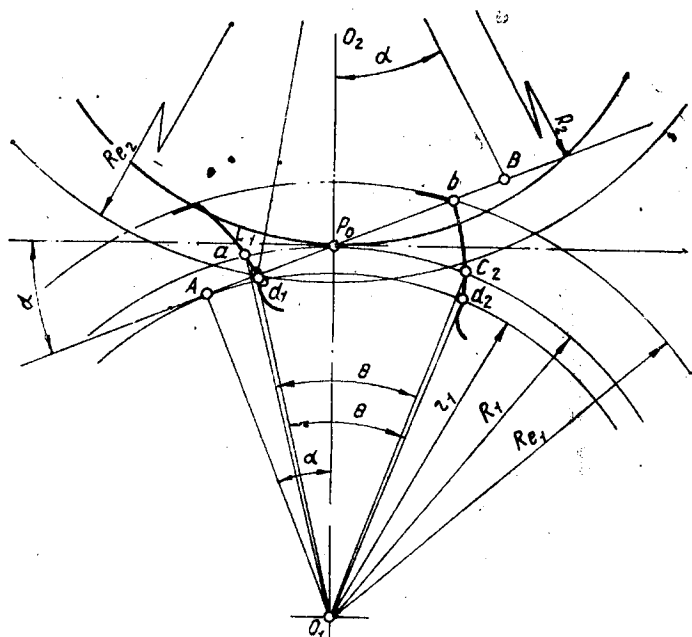


Рис. 94.

ваться зацепление будет при положении эвольвенты зуба, когда она попадет в точку b . Следовательно, на протяжении зацепления эвольвента зуба по начальной окружности переместится на $\cup C_1 C_2$, которая называется дугой зацепления. Длину дуги можно выразить через практическую линию зацепления ab . Из рис. 94 имеем

$$\theta = \frac{\cup d_1 d_2}{r_1} = \frac{\cup C_1 C_2}{R_1},$$

откуда $\cup C_1 C_2 = \frac{\cup d_1 d_2}{\cos \alpha}$, так как $\frac{r_1}{R_1} = \cos \alpha$. Из свойств эвольвенты (из условий ее образования) $\cup d_1 d_2 = \overline{ab}$, поэтому

$$\cup C_1 C_2 = \frac{ab}{\cos \alpha}. \quad (81)$$

Для оценки качества зубчатого зацепления пользуются понятием коэффициента перекрытия (коэффициента плавности) зубчатого зацепления. Коэффициентом перекрытия называется отношение дуги зацепления к шагу зацепления по начальной окружности. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\cup C_1 C_2}{t_n} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{ab}{t_n \cos \alpha}. \quad (82)$$

Но

$$\cos \alpha = \frac{r_1}{R_1} = \frac{2\pi r_1}{2\pi R_1} = \frac{t_0 z_1}{t_n z_1} = \frac{t_0}{t_n},$$

где $t_0 = t_n \cos \alpha$ — шаг по основной окружности.

При этом надо учитывать, что если $\varepsilon = 1$, то $\cup C_1 C_2 = t_n$ и в зацеплении все время находится одна пара зубьев; $\varepsilon = 2$, то $\cup C_1 C_2 = 2t_n$ и в зацеплении все время находится две пары зубьев; $\varepsilon = 1,7$, то в зацеплении 70% времени находится две пары зубьев и 30% — одна пара зубьев.

Следует принимать коэффициент перекрытия $\varepsilon > 1$, в противном случае, когда одна пара зубьев выйдет из зацепления (в точке b), другая пара еще не войдет в зацепление, т. е. в зацеплении будут перерывы, чего не следует допускать. Обычно $\varepsilon \geq 1,1$. Для повышения работоспособности зубчатого зацепления необходимо увеличивать ε . При увеличении ε нагрузка между зубьями будет передаваться одновременно двумя парами зубьев более длительное время.

Коэффициент перекрытия обычно определяется аналитическим путем. Выразим практическую линию зацепления через параметры зубчатого зацепления.

Из чертежа (рис. 94) имеем:

$$ab = Ab + Ba - AB,$$

но

$$Ae = \sqrt{O_1 e^2 - O_1 A^2} = \sqrt{R_{e_1}^2 - R_1^2 \cos^2 \alpha};$$

$$Ba = \sqrt{O_2 a^2 - O_2 B^2} = \sqrt{R_{e_2}^2 - R_2^2 \cos^2 \alpha};$$

$$AB = AP_0 + BP_0 = R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \alpha = (R_1 + R_2) \sin \alpha,$$

тогда

$$ab = \sqrt{R_{e_1}^2 - R_1^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{R_{e_2}^2 - R_2^2 \cos^2 \alpha} - (R_1 + R_2) \sin \alpha, \quad (83)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R_{e_1}^2 - R_1^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{R_{e_2}^2 - R_2^2 \cos^2 \alpha} - (R_1 + R_2) \sin \alpha}{t_n \cos \alpha}. \quad (84)$$

§ 24. Коническое зубчатое зацепление

Коническое зубчатое зацепление применяется при передаче вращательного движения между пересекающимися осями I и II (рис. 95).

Для заданных угла δ пересечения осей I и II и передаточного отношения $i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}$ найдем аксоиды относительного движения — поверхности, при перекатывании которых друг по другу осуществляется этот закон движения.

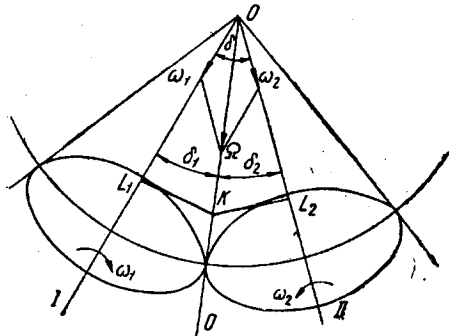


Рис. 95.

Если всей системе (см. рис. 95) придать обратное движение с угловой скоростью ω_1 , то угловая скорость в относительном движении будет равна $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2$ (ω_1 принимается с обратным знаком). Этим определится положение мгновенной оси относительного движения OO . Геометрические места линий OO , принадлежащие первому и второму звеньям в относительном движении, образуют соответственно две конические поверхности — аксоиды относительного движения, которые называются начальными конусами.

Для определения этих конусов найдем углы δ_1 и δ_2 . Одно уравнение будет $\delta_1 + \delta_2 = \delta$. Для получения другого уравнения возьмем на оси OO произвольную точку K , являющуюся общей точкой двух начальных конусов. Окружная скорость этой точки $v_K = \omega_1 KL_1 = \omega_2 KL_2$, но $KL_2 = OK \sin \delta_2$ и $KL_1 = OK \sin \delta_1$, тогда

$$\omega_1 OK \sin \delta_1 = \omega_2 OK \sin \delta_2 \text{ и } \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{1-2} \quad (85)$$

Решая совместно уравнения, получим:

$$i_{1-2} = \frac{\sin(\delta - \delta_1)}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta}{\text{tg } \delta_1} - \cos \delta, \quad (86)$$

откуда

$$\text{tg } \delta_1 = \frac{\sin \delta}{i_{1-2} + \cos \delta}, \quad (87)$$

$$\delta_2 = \delta - \delta_1. \quad (88)$$

Установим, на какой поверхности будут располагаться профили зубьев конических зубчатых колес. Точки профиля первого колеса, перемещаясь в процессе зацепления, контактируют с точками профиля второго зубчатого колеса. Контакт этих точек возможен, если

они будут находиться на одном и том же расстоянии от точки O — пересечения осей I и II. Следовательно, поверхность, на которой располагаются профили зубьев, будет геометрическим местом точек, равноудаленных от точки O в пространстве, т. е. сферой с центром в точке O .

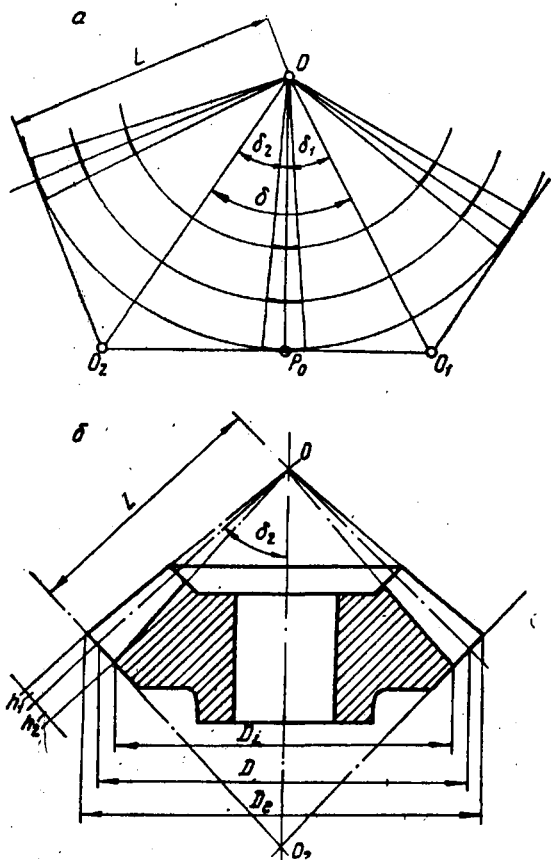


Рис. 96.

Таким образом, для построения конического зубчатого зацепления следует, аналогично предыдущему, проделать все построения на сферической поверхности. Рассматривая коническое зубчатое зацепление на сферах с непрерывно уменьшающимся радиусом, получаем конические зубчатые колеса с зубьями, располагающимися вдоль образующих начальных конусов (рис. 96, а, б). Коническое зубчатое зацепление можно построить на сферической поверхности. Однако, в целях упрощения данной задачи и использования ранее получен-

ных результатов для зубчатого зацепления на плоскости, обычно коническое зубчатое зацепление приводят к плоскому. Так как сфера на плоскость не разворачивается, можно заменить с некоторым приближением часть сферической поверхности, на которой располагается коническое зацепление, поверхностями дополнительных конусов с вершинами O_1 и O_2 . Развертывая эти дополнительные конусы на

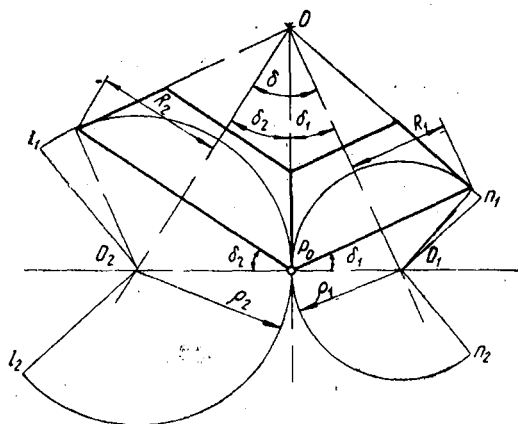


Рис. 97.

плоскость, получаем два сектора и зацепление на плоскости (рис. 97). На $\cup l_1 l_2$ и $\cup n_1 n_2$ располагаются зубья конических колес, числа которых соответственно будут z_1 и z_2 .

Во все ранее полученные выражения зубчатого зацепления на плоскости входят числа зубьев, располагающихся на всей окружности колес. Обозначим через z'_1 и z'_2 числа зубьев на полных окружностях разверток. Эти числа носят назва-

ние приведенных (или фиктивных) чисел зубьев. Найдём их значение.

Из рис. 97 имеем:

$$2\pi R_1 = z_1 t \quad (89)$$

и

$$2\pi \rho_1 = z'_1 t, \quad (90)$$

откуда

$$\frac{2\pi R_1}{2\pi \rho_1} = \frac{z_1 t}{z'_1 t} \quad (91)$$

или

$$\frac{R_1}{\rho_1} = \frac{z_1}{z'_1}, \quad (92)$$

но

$$\frac{R_1}{\rho_1} = \cos \delta_1, \quad (93)$$

поэтому

$$z'_1 = \frac{z_1}{\cos \delta_1}, \quad (94)$$

аналогично

$$z'_2 = \frac{z_2}{\cos \delta_2}. \quad (95)$$

Таким образом, используя числа зубьев z_1 и z_2 , можно применить для конического зубчатого зацепления все полученные ранее выражения для зацепления на плоскости.

§ 25. Косозубые и шевронные зубчатые колеса

Образование боковых поверхностей зубьев цилиндрических прямозубых зубчатых колес с параллельными осями происходит при качении без скольжения по основному цилиндру касательной плоскости T с прямой AB , параллельной его оси. Каждая точка этой прямой будет описывать эвольвенту. Геометрическим местом эволь-

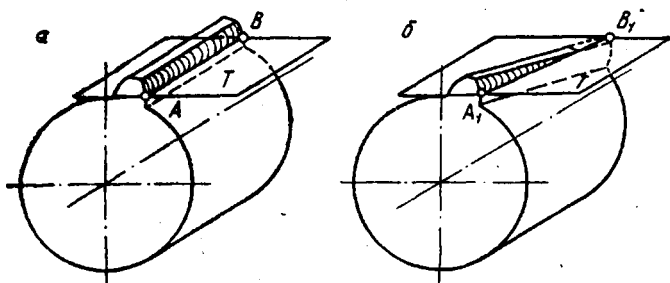


Рис. 98.

вент будет боковая поверхность зуба прямозубого зубчатого колеса, зубья которого располагаются вдоль образующей основного цилиндра (рис. 98, а).

Если же в плоскости T , касательной к основному цилиндру, расположить прямую A_1B_1 (рис. 98, б) под некоторым углом к его оси, то при качении этой плоскости по цилиндру точки прямой A_1B_1 будут также описывать эвольвенты, но уже смещенные. Геометрическим местом этих эвольвент будет боковая поверхность зуба, располагающегося по винтовой линии. Пару зубчатых колес, находящихся в зацеплении с параллельными осями и такими зубьями, принято называть косозубой. У такой пары зубья в различных плоскостях, перпендикулярных осям колес, будут находиться в разной фазе зацепления.

Предположим, что у зубчатого колеса (рис. 99, а) в плоскости I профиль зуба входит в зацепление. Тогда для того чтобы профиль зуба в плоскости II попал в зацепление, ему нужно пройти дополнительную дугу зацепления S_d . Поэтому коэффициент перекрытия пары косозубых колес $\epsilon_k = \epsilon + \frac{S_d}{t}$, где ϵ — коэффициент перекрытия прямозубого зацепления (в плоскости I), определяемый по ранее полученному выражению. Так как $S_d = b \operatorname{tg} \delta$, то $\epsilon_k = \epsilon + \frac{b}{t} \operatorname{tg} \delta$. Угол

δ — угол наклона винтовой линии зуба. Увеличение коэффициента перекрытия приводит к повышению плавности работы зубчатого зацепления и его работоспособности. Обычно $\delta = 8 + 12^\circ$, т. е. сравнительно мал. Это объясняется тем, что при увеличении угла δ для данного окружного усилия P осевая составляющая P_0 нормального усилия P_n , передаваемого зубом колеса, также увеличивается (рис. 99, б) и для больших углов δ требуется специальное устройство, воспринимающее это усилие, что усложняет конструкцию механизма.

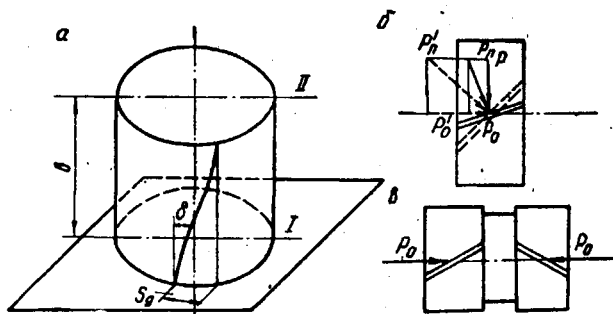


Рис. 99.

Для того чтобы более полно использовать достоинства косозубых колес, применяются шевронные зубчатые колеса (рис. 99, в), в которых осевые усилия P_0 взаимно уравниваются.

В этом случае $\delta \approx 30^\circ$. Дальнейшее увеличение угла δ нецелесообразно, так как при данном окружном усилии P большое значение принимает нормальная сила P_n , что при всех прочих равных условиях снижает работоспособность зубчатого зацепления.

§ 26. Точечное зубчатое зацепление М. Л. Новикова

Работоспособность зубчатого зацепления в значительной степени определяется контактными напряжениями, которые рассчитываются по выражениям, полученным на основании формулы Герца-Беляева

$$\sigma_k = 0,418 \sqrt{\frac{P_n E}{b} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)}, \quad (96)$$

где P_n — передаваемое нормальное усилие;

E — модуль упругости материала зубьев;

b — протяженность контактной линии зубьев;

ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны профилей зубьев в месте контакта.

Из этого выражения видно, что при всех прочих равных условиях контактные напряжения зависят от величины $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ — приведенной кривизны соприкасающихся поверхностей.

В 1955 г. М. Л. Новиков предложил новое зубчатое зацепление, у которого приведенная кривизна значительно меньше, чем у других существующих видов зубчатого зацепления.

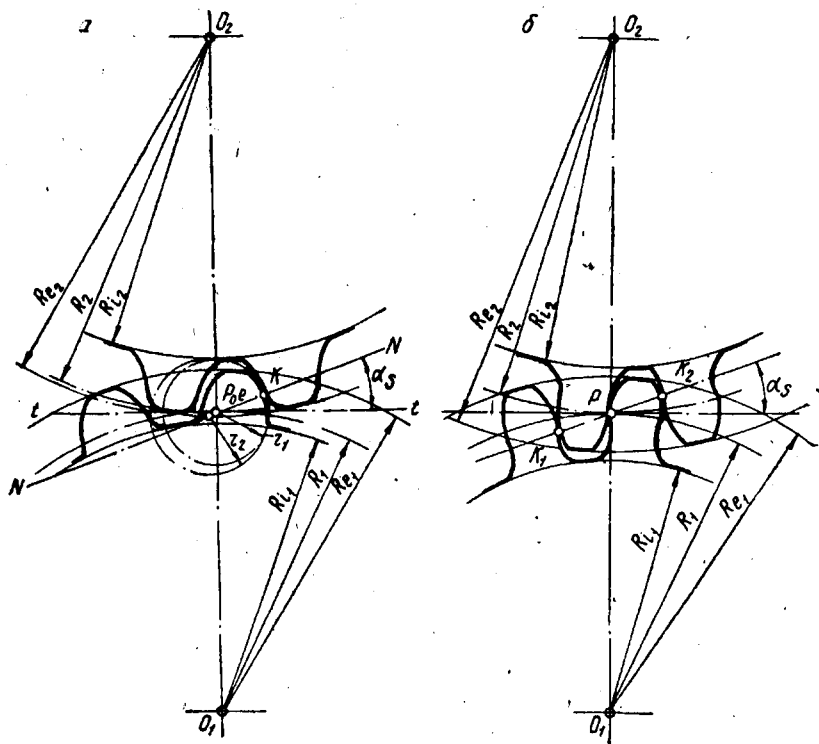


Рис. 100.

Построение этого зацепления показано на рис. 100, а. Вначале проводится линия центров O_1O_2 , затем радиусами R_1 и R_2 — начальные окружности, соприкасающиеся в точке P_0 . Через эту точку к начальным окружностям проводится касательная прямая $t-t$ и под углом α_s — прямая NN .

На линии NN на расстоянии l от точки P_0 будет располагаться точка K — точка контакта зубьев. Радиусами r_1 и r_2 очерчиваются круговые профили зубьев, которые ограничиваются с одной стороны окружностями выступов с радиусами R_{e1} и R_{e2} , а с другой — окружностями впадин с радиусами R_{i1} и R_{i2} . Откладывая

шаг t по начальным окружностям и толщины зубьев S_1 и S_2 , строим симметричные профили. В результате построения зубья имеют выпуклые и вогнутые профили. Выпуклые зубья обычно принимаются для малого зубчатого колеса, вогнутые — для большого. Параметры этого зубчатого зацепления не установлены ГОСТом.

Можно принять следующие соотношения:

$$R_1 = \frac{m_s z_1}{2}; \quad R_2 = \frac{m_s z_2}{2}; \quad \overline{O_1 O_2} = R_1 + R_2; \quad (97)$$

$$R_{e_1} = R_1 + 1,15m_s; \quad R_{i_1} = R_1 - 0,35m_s; \quad R_{e_2} = R_2; \quad (98)$$

$$R_{i_2} = R_2 - 1,3m_s; \quad t_s = \pi m_s; \quad (99)$$

$$l = (1,25 \div 1,35)m_s; \quad S_1 = (1,3 \div 1,5)S_2; \quad \alpha_s = 20^\circ \div 30^\circ. \quad (100)$$

Здесь m_s — модуль зацепления в торцевом сечении.

Контакт зубьев происходит в точке K . При дальнейшем движении зубьев они уже не будут контактировать, так как основной закон зацепления будет удовлетворяться только в точке K . Поэтому в торцевом сечении (в плоскости чертежа) контакт зубьев в процессе движения будет мгновенным, а линия зацепления в этой плоскости обращается в точку (точка K). Следовательно, в торцевом сечении коэффициент перекрытия равен нулю. Для того чтобы зацепление было непрерывным, необходимо иметь коэффициент перекрытия больше единицы. Это возможно при условии, если зубчатые колеса будут косозубыми, у которых $\epsilon_k = \epsilon + \frac{b}{t_s} \operatorname{tg} \delta$.

Следовательно, боковые поверхности зубьев будут винтокруговыми.

Угол $\delta = 12^\circ \div 20^\circ$, поэтому толщина зубчатых колес b принимается из соотношения

$$\epsilon_k = \frac{b}{t_s} \operatorname{tg} \delta \geq 1,1. \quad (101)$$

Линия зацепления такой пары колес проходит параллельно осям колес через точку K . Так как материал зубьев в месте контакта упруго деформируется, то фактически контакт зубьев будет происходить по площадке, т. е. будет не точка, а пятно контакта.

Работоспособность точечного зубчатого зацепления при всех прочих равных условиях выше, чем эвольвентного зацепления в 1,5–2,5 раза. В таких колесах основной закон зацепления удовлетворяется в одной точке, поэтому z_{\min} определяется из условий, отличающихся от условий эвольвентного зацепления. Здесь можно в случае необходимости принять на малом колесе до одного зуба.

В настоящее время получает распространение дозаполненное точечное зацепление, имеющее выпукло-вогнутые зубья (рис. 100, б).

Глава V. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Механизмы, в состав которых входят кинематические пары, передающие движение при помощи взаимоогibaемых кривых (или поверхностей), называются кулачковыми механизмами. Они позволяют получить любой, за редким исключением, необходимый закон движения ведомого звена. Кулачковые механизмы широко применяются в станках, двигателях внутреннего сгорания, металлургических машинах, машинах пищевой, легкой промышленности и многих других машинах.

В кулачковых механизмах (рис. 101) различают ведомое звено 2, профиль которого обычно задается (огibaемая кривая) и ведущее звено 1, профиль которого строится (огibaющая кривая) для осуществления заданного закона движения. Последнее звено называется кулачком.

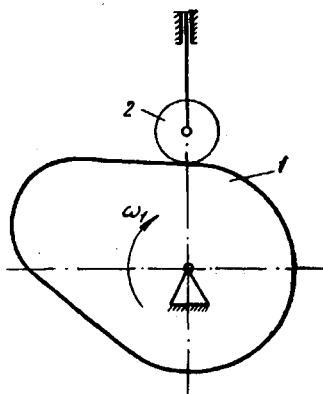


Рис. 101.

Задача синтеза кулачкового механизма заключается в построении профиля кулачка, обеспечивающего заданный закон движения ведомого звена.

В кулачковом механизме ведущее звено может иметь вращательное или поступательное движение, а ведомое звено — поступательное, вращательное или сложное движение.

При синтезе кулачкового механизма необходимо задать:

- форму огibaемой кривой — профиль ведомого звена;
- закон движения ведущего звена;
- закон движения ведомого звена, для осуществления которого строится кулачковый механизм;
- дополнительные условия (рабочий угол кулачка, начальное взаимное расположение ведущего и ведомого звеньев).

Рассмотрим несколько подробнее условия, при которых осуществляется синтез кулачкового механизма.

Форма огibaемой кривой может представлять собой точку (рис. 102, а), прямую (рис. 102, б) или кривую — окружность, эвольвенту и т. п. (рис. 102, в). Огibaемая кривая в виде точки

практически не может быть использована, так как точка — острие ведомого звена — не может передавать каких-либо даже самых незначительных усилий. Поэтому кулачковый механизм, имеющий огибаемую точку, возможен только теоретически, а профиль кулачка — огибающая кривая — в этом случае представляет собой теоретический профиль.

Для очертания профиля ведомого звена можно использовать прямую линию, однако следует иметь в виду, что в этом случае профиль кулачка не может быть вогнутым. Поэтому далеко не всякий заданный закон движения ведомого звена может быть осуществлен.

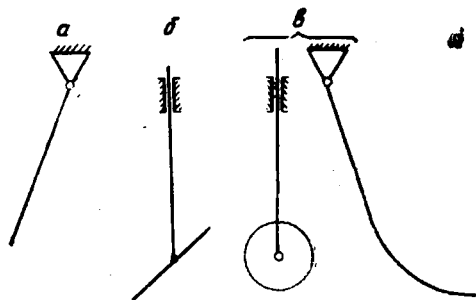


Рис. 102.

Наибольшее распространение имеет криволинейный профиль и, особенно окружность. Это объясняется, с одной стороны, простотой изготовления цилиндрического круглого ролика, а с другой, — отсутствием скольжения ролика по профилю кулачка, что приводит к уменьшению износа профиля кулачка и повышению к. п. д. механизма.

Закон движения ведущего звена обычно задается в виде угловой или линейной скорости, постоянной по величине. Однако не исключено, что скорость ведущего звена может быть и переменной.

Закон движения ведомого звена принимается в зависимости от назначения кулачкового механизма. Этот закон может быть задан в виде перемещения, скорости или ускорения в функции перемещения ведущего звена или времени. Независимо от того, в каком виде задан закон движения ведомого звена, его следует представить во всех трех возможных видах. Это объясняется тем, что даже самый простой закон движения, заданный в виде перемещения в функции времени, по условиям ускорения либо нецелесообразен, либо вообще не может быть осуществлен. Закон же движения, заданный в виде ускорения или скорости в функции времени, необходимо представить в виде перемещения в функции времени, так как построение профиля кулачка производится с использованием этого вида зависимости.

Рассмотрим некоторые из возможных законов движения ведомого звена. На рис. 103, а перемещение выражается прямолинейными зависимостями от времени. Дифференцируя дважды, получаем графики скоростей и ускорений. В трех точках графика ускорение равно бесконечности. Динамическое усилие в этом случае также равно бесконечности, т. е. имеет место жесткий удар. Осуществить такой закон движения нельзя.

На рис. 103, б график перемещения описывается параболой второй степени. Это приводит к графику ускорений в виде ступенчатой линии, где ускорение меняется мгновенно, но на конечную величину. Динамическая нагрузка имеет конечную величину, но ударный характер, т. е. нежесткий удар.

График рис. 103, в представляет собой синусоиду, поэтому и график ускорений также будет изображаться синусоидой, т. е. динамическое усилие меняется плавно, механизм не испытывает ударов. Следовательно, более предпочтителен последний закон, так как при

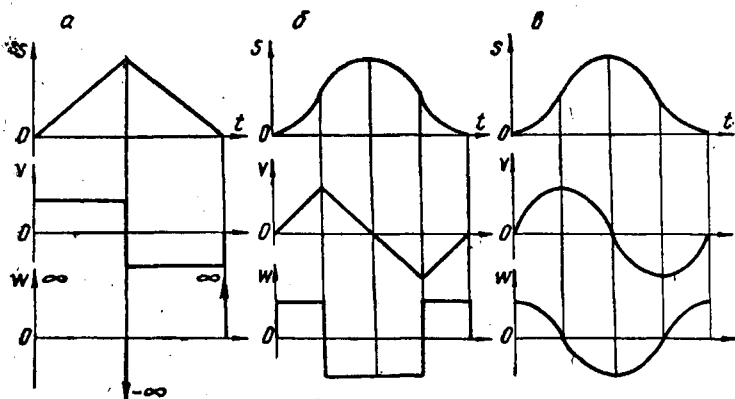


Рис. 103.

всех прочих равных условиях он позволяет получить более работоспособный механизм.

§ 27. Кинематический синтез кулачковых механизмов

Рассмотрим построение профиля кулачка по кинематическим условиям для некоторых видов кулачковых механизмов.

1. Дано: кулачок движется поступательно с постоянной скоростью v по плоскости 1 (рис. 104, б); ведомое звено 2 движется поступательно; начальное положение ведомого звена определяется положением точки A_0 ; форма огибаемой кривой 2 — окружность; закон движения ведомого звена представлен графической зависимостью (рис. 104, а).

Для построения профиля кулачка время движения ведомого звена разбиваем на ряд равных отрезков (в рассматриваемом случае на 8) и устанавливаем ординаты графика b_1, b_2, b_3, \dots . Всему кулачковому механизму придаем обращенное движение со скоростью, равной v и направленной в противоположную сторону. При этом ведущее звено 4 остановится, а ведомое звено будет перемещаться

со скоростью v по плоскости I и вдоль направляющей в соответствии с заданным законом движения (рис. 104, а). При движении по плоскости I за равные промежутки времени звено 3 будет перемещаться на равные отрезки пути $a = (O1) k_1 v$. По истечении каждого промежутка времени звено 3 будет перемещаться вдоль направляющей на отрезки $A_1 A_1 = = b_1 k_S$, $A_2 A_2 = b_2 k_S$ и т. д. Это определяет положение точек A_1, A_2, \dots в обратном движении. Соединяя эти точки плавной кривой, получим теоретический профиль кулачка I . Построив в каждом положении ведомого звена огибаемую (окружность), строим огибающую II (практический профиль кулачка). Для точности построения профилей отрезки времени принимают малыми.

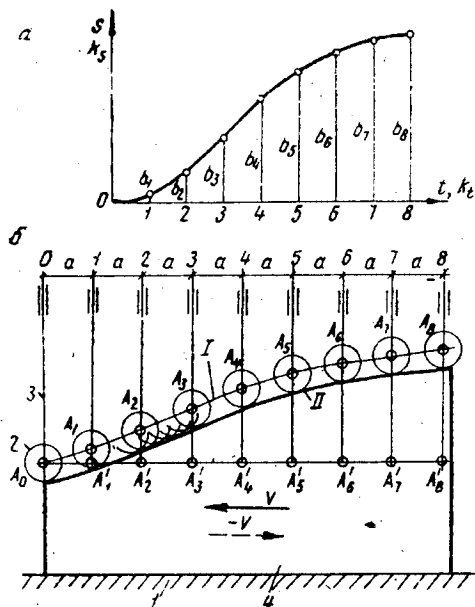


Рис. 104.

(рис. 105, а); начальное положение ведомого звена определяется положением точки A_0 ; форма огибаемой кривой 2 — окружность; дополнительное условие — рабочий угол кулачка $\varphi_p = 360^\circ$.

Для построения профиля кулачка время движения ведомого звена разбиваем на равные участки и определяем ординаты b_1, b_2, \dots , соответствующие перемещениям ведомого звена в каждый момент времени. Затем всему кулачковому механизму даем обратное движение с угловой скоростью $-\omega$. В этом движении кулачок будет неподвижным, а ведомое звено I вместе с направляющей на протяжении угла $\varphi_p = 360^\circ$ будет последовательно занимать положения $0, 1, 2$, находящиеся на равных расстояниях. Точка A будет занимать положения A_0, A_1, A_2, \dots . Так как ведомое звено I перемещается вдоль направляющей, точка A в обратном движении займет положения A_1, A_2, A_3, \dots , которые определяются из условия $A_1 A_1 = b_1 k_S$; $A_2 A_2 = b_2 k_S$; $A_3 A_3 = b_3 k_S$; \dots

Соединяя плавной кривой точки A_0, A_1, A_2, \dots , получаем теоретический профиль кулачка I . Построив для точек A_0, A_1, A_2, \dots

огibaемую — окружность, проводим огибающую II — практический профиль кулачка.

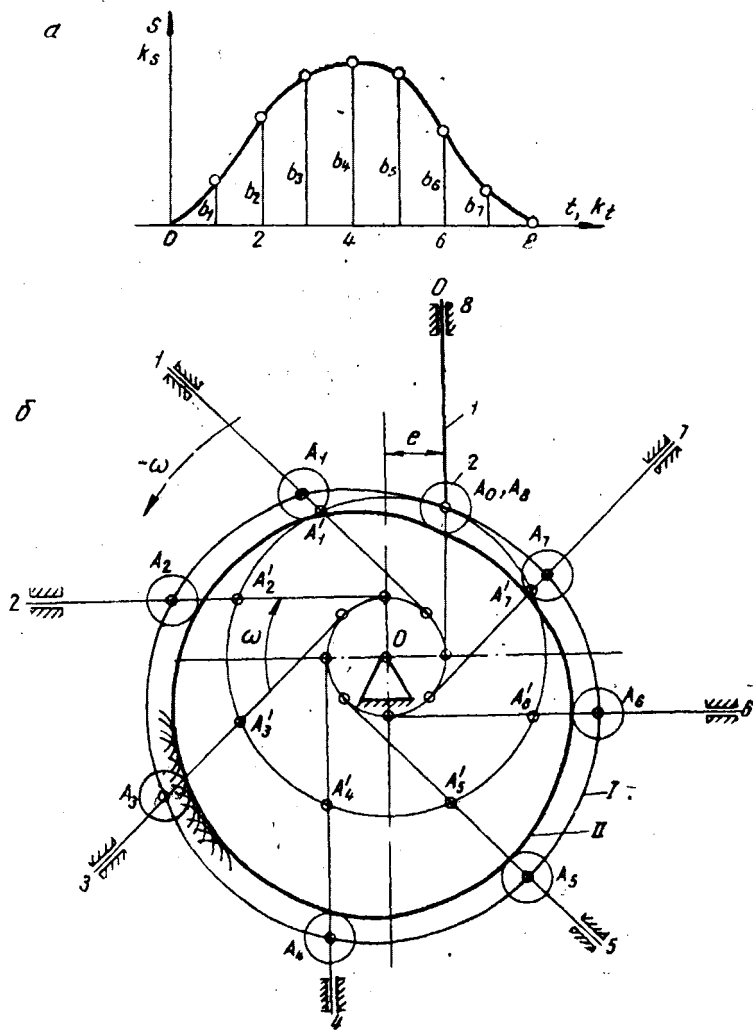


Рис. 105.

3. Дано: кулачок вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси O ; ведомое звено I (рис. 106, б) качается вокруг оси B_0 в соответствии с заданным законом движения (рис. 106, а); форма огибаемой кривой — окружность радиуса r ; начальное положение

ведомого звена I определяется углом φ_0 и длиной звена AB ; дополнительное условие — рабочий угол кулачка $\varphi_P = 180^\circ$.

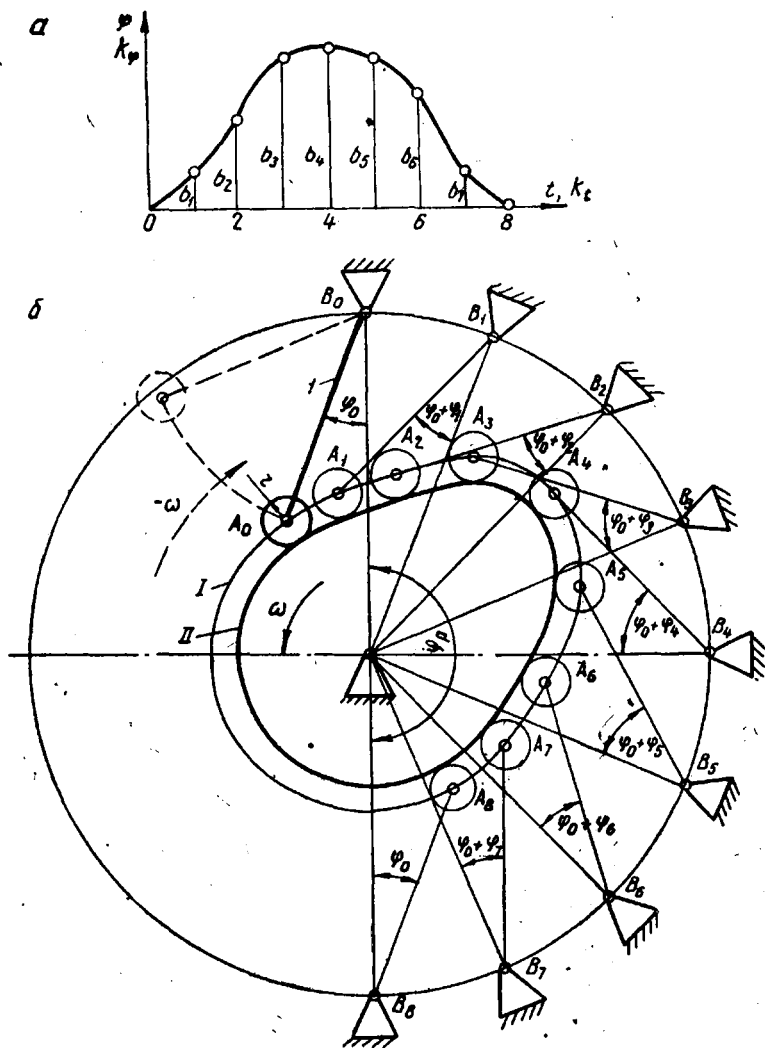


Рис. 106.

Для построения профиля кулачка время движения ведомого звена разбиваем на ряд равных отрезков и находим ординаты b_1, b_2, \dots (рис. 106, а), определяющие угловое перемещение звена AB . Всему кулачковому механизму придаем обращенное движение с угловой скоростью $-\omega$. В этом обращенном движении ось вращения B

на протяжении угла $\varphi_p = 180^\circ$ будет последовательно занимать положения B_0, B_1, B_2, \dots , находящиеся на равных расстояниях. Положение звена AB будет определяться углами $\varphi_0; \varphi_0 + \varphi_1; \varphi_0 + \varphi_2; \dots$,

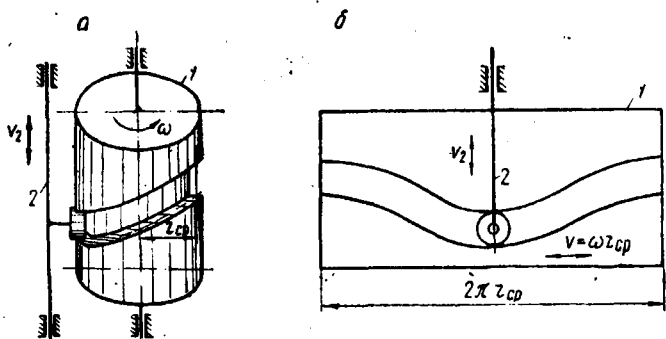


Рис. 107.

где $\varphi_1 = b_1 k_\varphi$; $\varphi_2 = b_2 k_\varphi$; \dots . Соединив плавной кривой точки A_0, A_1, A_2, \dots , получим теоретический профиль кулачка I. Строим огибающую II — практический профиль кулачка.

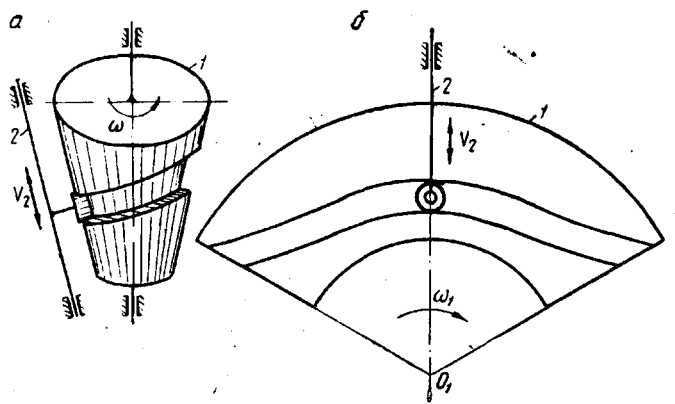


Рис. 108.

Профилирование кулачков пространственных кулачковых механизмов с цилиндрическим (рис. 107, а) и коническим барабанами (рис. 108, а) осуществляется с достаточной для практики точностью после развертки «средних» поверхностей барабанов на плоскость. В этом случае построение производится так же, как и для плоских кулачковых механизмов при поступательном (рис. 107, б) и вращательном движении кулачка (рис. 108, б).

При построении практического профиля кулачка большое значение имеет правильное назначение радиуса огибаемой окружности-ролика. Если радиус ролика r_1 (рис. 109) принять равным ρ_{\min}

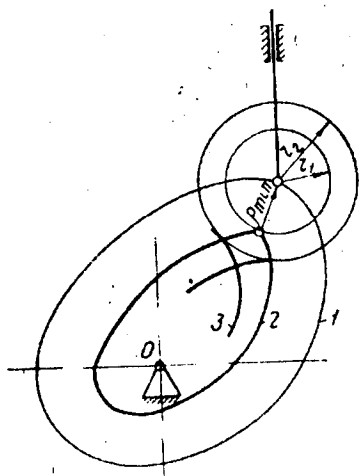


Рис. 109.

(минимальному радиусу кривизны теоретического профиля 1), то практический профиль 2 в этом случае будет иметь радиус кривизны, равный нулю, т. е. острие. Такой профиль не будет работоспособным. Если же принять радиус ролика $r_2 > \rho_{\min}$, то практический профиль 3 будет иметь самопересечение. В этом случае не будет обеспечиваться заданный закон движения толкателя. Поэтому необходимо соблюдать условие $r < \rho_{\min}$. Для практических целей обычно принимают $r \leq 0,8 \rho_{\min}$. Соотношение же между радиусами кривизны практического профиля и радиусом ролика принимается после проведения расчетов на прочность.

§ 28. Динамический синтез кулачковых механизмов

При создании кулачкового механизма стремление получить минимальные его габариты может привести к низкому к. п. д., а иногда и вообще к невозможности передать движение от кулачка к ведомому звену вследствие его заклинивания. Это объясняется тем, что при вращательном движении кулачка 1 (рис. 110) сила его давления P_{1-2} на ведомое звено 2 направлена по нормали NN к взаимно-огibaемым кривым. Движущей же силой для звена 2 является составляющая P'_{1-2} , а другая составляющая P''_{1-2} будет создавать в направляющих реакции R_1 и R_2 и силы трения F_1 и F_2 . Если $P_2 + F_1 + F_2 > P'_{1-2}$ то будет происходить заклинивание звена 2. P_2 — полезная нагрузка на звено 2. При отсутствии заклинивания, но при больших относительных значениях сил F_1 и F_2 к. п. д. кулачкового механизма будет мал. Все это зависит от угла λ , который для исключения возможности заклинивания и получения достаточно высокого к. п. д. кулачкового механизма принимается $\lambda_{\max} \leq 30^\circ$. Угол λ — угол между общей нормалью к профилям и скоростью движения ведомого звена называется углом давления. Максимальная величина этого угла λ_{\max} в кулачковом механизме будет зависеть от взаимного расположения ведомого звена и центра вращения кулачка.

Рассмотрим, каким образом следует расположить центр вращения кулачка; чтобы в течение цикла угол давления не превосходил заданного максимального значения λ_{\max} .

Мгновенный центр относительного вращения P_0 (см. рис. 110) находится на общей нормали к взаимноогibaемым кривым и определяется отрезком $OP_0 =$

$$= \frac{v}{\omega_1},$$

где v — скорость движения толкателя, а ω_1 —

угловая скорость кулачка. По истечении некоторого

промежутка времени кулачок повернется по отношению к толкателю, точка A_0 которого переместится в положение A' и займет

новое место, а угол давления будет уже λ' . Мгновенный же центр относительного вращения расположится в точке P'_0 , причем

$$OP'_0 = \frac{v'}{\omega_1},$$

где v' — скорость толкателя в новом

положении. Если теперь от точки A_0 отложить отрезок $A_0C = OP_0$, соединить точку C с точкой O и из

точки C провести прямую \parallel направлению движения толкателя, то при вершине C

эти прямые образуют угол λ . Если же от точки A' отложить отрезок $A'C' = OP'_0$, то после аналогичных построений получаем угол λ' .

Пусть дан закон возвратно-поступательного движения ведомого звена в форме перемещения в функции угла поворота ведущего звена (рис. 111), угловая скорость ведущего звена ω_1 и угол λ_{\max} . Необходимо найти положение оси вращения кулачка с тем, чтобы в процессе движения соблюдалось условие $\lambda \leq \lambda_{\max}$.

Ранее было $OP_0 = \frac{v}{\omega_1}$, но $v = \frac{ds}{dt}$, следовательно, $OP_0 = \frac{ds}{\omega_1 dt} = \frac{ds}{d\varphi_1}$, т. е. положение мгновенного центра в относительном движении определяется величиной производной перемещения толкателя по углу поворота кулачка. Положение оси вращения кулачка нахо-

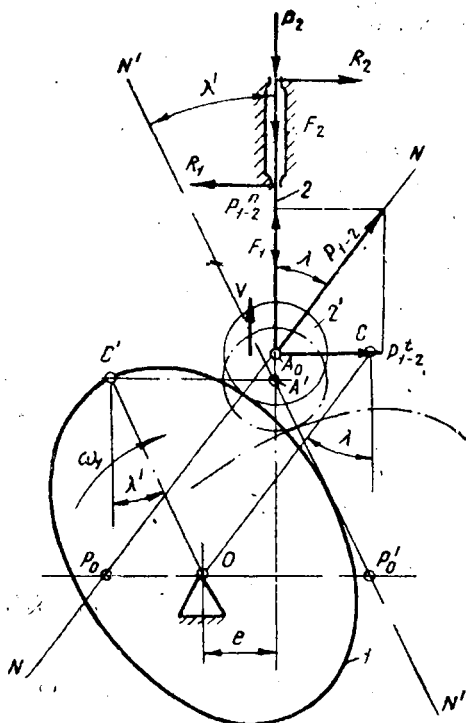


Рис. 110.

условиях. При необходимости центры O и O' можно располагать во всей заштрихованной области (см. рис. 111), соблюдая при этом условие, что центр O' будет находиться все время на прямой mn . Угол же λ при этих условиях будет меньше λ_{\max} , что улучшит условия работы кулачкового механизма. Следовательно, если нет особой необходимости в малых габаритах кулачкового механизма, то их можно несколько увеличить, уменьшая угол λ и повышая работоспособность и к. п. д. механизма.

Для кулачкового механизма, у которого ведомое звено имеет вращательное движение (рис. 112) элементарное перемещение $ds = (O_2A) d\varphi_2$, где $d\varphi_2$ — элементарный угол поворота ведомого звена.

Тогда отрезок $AC = \frac{ds}{d\varphi_1} = O_2A \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$. Следовательно,

но, имея графическую зависимость $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ — угла поворота ведомого

звена в функции угла поворота ведущего звена, после дифференцирования этого графика в каждом положении ведомого звена находим отрезок AC . Построив эти отрезки, при точках C строим углы λ_{\max} . Положение центра вращения кулачка O_1 принимается в одной из точек O'_1, O''_1, \dots наиболее удаленной от точки A_0 . Это позволит выдержать условие $\lambda < \lambda_{\max}$ для всего цикла движения кулачкового механизма. В случае необходимости центр вращения кулачка O_1 можно принять в любой точке заштрихованной области. В этом случае всегда $\lambda < \lambda_{\max}$.

При построении отрезка AC (для каждого положения ведомого звена) его следует откладывать к центру O_2 , если направление вращений кулачка и ведомого звена совпадают, и от центра, если вращение происходит в разные стороны.

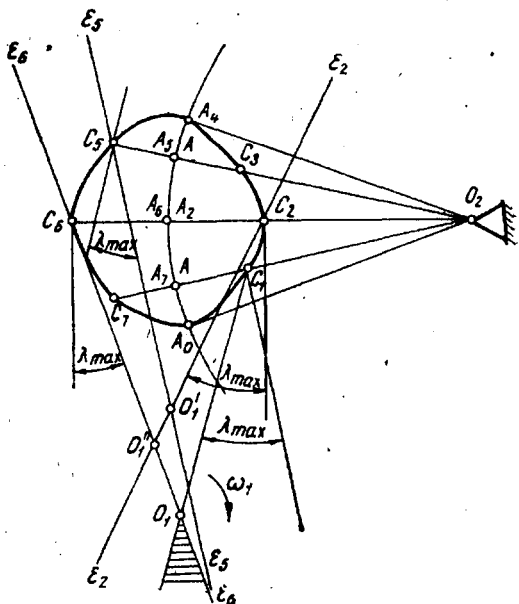


Рис. 112.

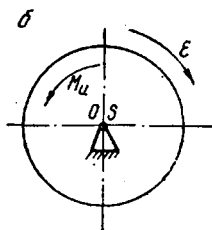
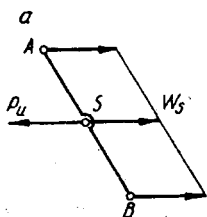
Глава VI. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

Задачей силового расчета является определение сил, действующих на звенья, и сил взаимодействия звеньев. Для решения этой задачи применяется кинестатический метод, опирающийся на принцип Даламбера. Согласно этому принципу к звеньям механизма, наряду с активными силами, прикладываются силы инерции и из условия равновесия этих сил при помощи уравнений статики отыскиваются неизвестные силы взаимодействия звеньев механизма — давления в кинематических парах.

§ 29. Силы инерции в плоских механизмах

В зависимости от характера движения звена силы инерции могут быть следующими.

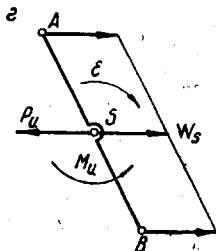
1. Звено движется поступательно (рис. 113, а). Сила инерции P_n прикладывается к центру тяжести звена и направляется в обратную сторону ускорения центра тяжести звена w_S



$$P_n = -mw_S,$$

где m — масса звена.

2. Звено вращается вокруг оси O , проходящей через центр тяжести звена S (рис. 113, б). Момент пары сил инерции M_n прикладывается к звену и направляется в обратную сторону углового ускорения звена ϵ



$$M_n = -I_S \epsilon,$$

где I_S — момент инерции массы звена относительно его центра тяжести.

3. Звено вращается вокруг оси O , не проходящей через центр тяжести звена S (рис. 113, в). Сила инерции и момент пары сил инерции

$$P_n = -mw_S \text{ и } M_n = -I_S \epsilon.$$

Рис. 113.

4. Звено находится в сложном плоском движении, которое можно представить в виде суммы двух движений: поступательного совместно с центром тяжести при ускорении ω_S и вращательного вокруг центра тяжести при угловом ускорении ϵ (рис. 113, з). Сила инерции и момент пары сил инерции определяются так же, как в предыдущем случае.

Следует иметь в виду условность приложения сил инерции и моментов пар сил инерции к звеньям. Фактически силы инерции и моменты будут приложены к связям, т. е. к тем звеньям, которые создают ускорение рассматриваемых звеньев.

§ 30. Учет сил инерции методом замещающих масс

В некоторых случаях при решении задач, связанных с силовым расчетом механизмов, удобно пользоваться только силами инерции. При этом вместо приведения всех сил инерции к силе и паре можно получить только одни силы инерции масс, сосредоточенные в некоторых выбранных точках.

Распределенную массу плоского звена обозначим через m , момент инерции массы звена относительно центра тяжести — через I_S . Требуется данную систему с распределенной массой заменить системой масс, сосредоточенных в нескольких (n) замещающих точках.

Условия эквивалентности систем будут следующими:

а) сумма масс, сосредоточенных в замещающих точках, равна массе звена, т. е.

$$\sum_1^n m_i = m,$$

где m_i — масса, сосредоточенная в i -й замещающей точке;

б) общий центр тяжести масс, сосредоточенных в замещающих точках, совпадает с центром тяжести звена, т. е.

$$\sum_1^n m_i x_i = 0 \text{ и } \sum_1^n m_i y_i = 0,$$

где x_i и y_i — координаты, определяющие положения замещающих точек в прямоугольной системе координат с началом, совпадающим с центром тяжести;

в) общий момент инерции замещающих масс относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен моменту инерции массы звена относительно этой же оси, т. е.

$$\sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_S.$$

Таким образом, в самом общем случае имеется 4 уравнения для отыскания неизвестных. Поэтому, если число неизвестных будет больше, чем 4, то некоторыми из них следует задаться.

В качестве примера рассмотрим плоское звено AB (рис. 114), у которого масса m равномерно распределена по его длине. Момент инерции массы звена относительно центра тяжести I_S , длина звена l , отрезки a и b определяют положение центра тяжести звена S . В качестве замещающих точек примем точки A , B и S . Определим

массы m_A , m_B и m_S , сосредоточенные в замещающих точках. Из первого условия

$$m_A + m_B + m_S = m,$$

второго

$$m_A a - m_B b = 0,$$

третьего

$$m_A a^2 + m_B b^2 = I_S.$$

Решая эти уравнения, получим

$$m_A = \frac{I_S}{al}; \quad m_B = \frac{I_S}{bl}; \quad m_S = m - (m_A + m_B).$$

Таким образом, получена эквивалентная система, в которой массы сосредоточены в трех точках. Силы инерции для этой системы будут прикладываться в точках A , B и S . Величина этих сил, как и обычно, будет определяться произведением ускорений этих точек на соответствующие массы.

§ 31. Условия статической определимости плоской кинематической цепи

Прикладывая к звеньям активные силы и силы инерции для отыскания неизвестных сил взаимодействия звеньев — давлений в кинематических парах на основании принципа Даламбера, рассмотрим равновесие звеньев под действием этих сил, используя уравнения статики. Задача должна быть статически определима. Установим, какая плоская кинематическая цепь удовлетворяет этому условию. Число уравнений статики должно быть равно числу неизвестных. В общем случае плоская кинематическая цепь может состоять из n звеньев, p_5 числа пар 5-го класса и p_4 числа пар 4-го класса. Для одного плоского звена можно составить 3 уравнения статики, а для n звеньев — $3n$ уравнений статики.

Давление в одной кинематической паре будет определяться тремя параметрами — величиной силы, ее направлением и точкой приложе-

ния. Во вращательной паре 5-го класса (рис. 115, а) будет известна только точка приложения силы — центр пары, а неизвестных будет два — величина и направление силы. В поступательной паре 5-го класса (рис. 115, б) известно будет только направление силы — нормально поверхности элемента пары; неизвестных будет также два — величина и точка приложения силы. В паре 4-го класса (рис. 115, в) известными будут два параметра — точка приложения силы (точка контакта звеньев) и направление (по общей нормали к профилям звеньев в точке контакта). Неизвестным же будет одно — величина силы.

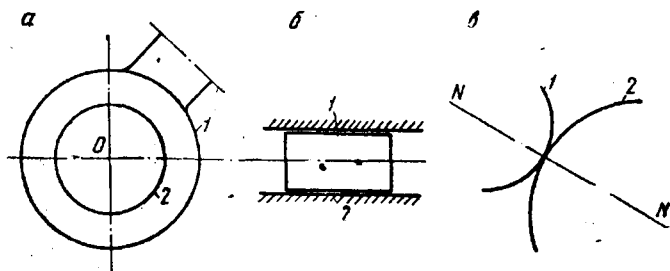


Рис. 115.

Таким образом, во всей кинематической цепи будет $2p_5 + p_4$ неизвестных. Условие статической определимости будет иметь вид:

$$3n = 2p_5 + p_4.$$

Только для такой кинематической цепи может быть решена задача определения давлений в кинематических парах при помощи уравнений статики.

Ранее было установлено, что пары 4-го класса могут быть заменены, т. е. плоскую кинематическую цепь можно всегда представить в виде звеньев, входящих только в пары 5-го класса. Тогда условие статической определимости плоской кинематической цепи будет следующим:

$$3n = 2p_5 \text{ или } n = \frac{2}{3} p_5.$$

Такое соотношение между числом звеньев и числом пар 5-го класса имеет место в группе Ассура. Следовательно, группа Ассура статически определима. Поэтому силовой расчет в дальнейшем будем вести по группам. Это указывает еще на одно достоинство классификации механизмов по Ассуру, которая позволяет иметь не только общие условия синтеза механизмов и кинематического анализа, но и общие условия силового расчета механизмов. Поэтому достаточно рассмотреть силовой расчет нескольких групп Ассура, как появится возможность производить силовой расчет всего многообразия механизмов, расчленив их на группы.

§ 32. Силовой расчет групп

Группы 2-го класса

Группа 1-го вида (рис. 116). В общем случае силы, действующие на звено, можно привести к силе и паре сил, что будет соответствовать наиболее общему случаю загрузки.

Дано: P_2, P_3, M_2, M_3 . Требуется определить давления в кинематических парах A, B и C , т. е. $P_{1-2}, P_{3-2}, P_{4-3}$, которые являются силами взаимодействия звеньев.

P_{1-2} — сила действия звена 1 на звено 2, P_{3-2} — сила действия звена 3 на звено 2 и т. п. P_{1-2} и P_{4-3} неизвестны, поэтому пока-

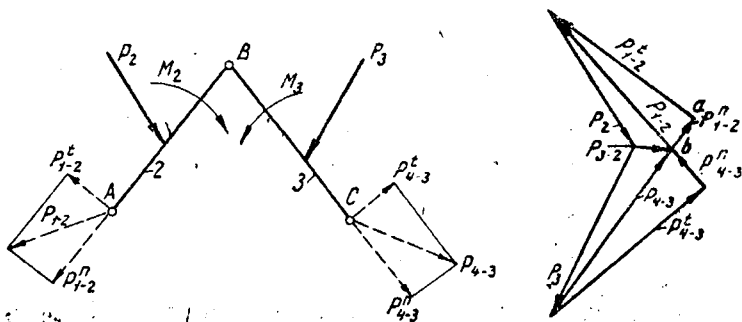


Рис. 116.

жем их штриховыми линиями. Разложим каждую из этих сил на две составляющие P_{1-2} — на $P_{1-2}^t \perp AB$ и $P_{1-2}^n \parallel AB$; P_{4-3} — на $P_{4-3}^t \perp BC$ и $P_{4-3}^n \parallel BC$.

Из условия равновесия звена 2

$$\sum M_B = M_2 + M_B(P_2) + P_{1-2}^t(AB) = 0,$$

Здесь, как и в дальнейшем, сумма моментов принимается алгебраической. Из полученного уравнения имеем:

$$P_{1-2}^t = - \frac{M_2 + M_B(P_2)}{AB}.$$

При численных расчетах результат может получиться со знаком $+$ или $-$. Если будет $+$, то это означает, что направление P_{1-2}^t правильное, а если знак $-$, то направление P_{1-2}^t следует изменить на обратное по отношению к первоначально принятому. Полагаем, что результат имеет знак $+$, тогда направление P_{1-2}^t будет соответствовать принятому первоначально.

Для звена 3 имеем

$$\sum M_B = M_3 + M_B(P_3) + P_{4-3}^t(BC) = 0,$$

откуда

$$P_{4-3}^t = - \frac{M_3 + M_B(P_3)}{BC}.$$

Полагаем также, что направление P_{4-3}^t совпадает с первоначальным, т. е. результат имеет знак $+$.

Из условия равновесия сил, приложенных ко всей группе имеем:

$$\sum \bar{P} = \bar{P}_{1-2}^n + \bar{P}_{1-2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4-3}^t + \bar{P}_{4-3}^n = 0.$$

Построим это уравнение. Из произвольной точки a отложим вектор \bar{P}_{1-2}^t , а затем последовательно векторы \bar{P}_2 , \bar{P}_3 , \bar{P}_{4-3}^t в масштабе $k_p \left[\frac{кг}{мм} \right]$. Из конца вектора \bar{P}_{4-3}^t проводим прямую по направлению \bar{P}_{4-3}^n и из точки a — прямую по направлению \bar{P}_{1-2}^n . В точке b пересечения этих прямых будет конец вектора \bar{P}_{4-3}^n и начало вектора \bar{P}_{1-2}^n . Векторы \bar{P}_{1-2} и \bar{P}_{4-3} получатся как результат суммирования векторов соответственно \bar{P}_{1-2}^t и \bar{P}_{1-2}^n ; \bar{P}_{4-3}^t и \bar{P}_{4-3}^n . Для звена 2 имеем

$$\sum \bar{P} = \bar{P}_{1-2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3-2} = 0.$$

Здесь неизвестна сила \bar{P}_{3-2} — действие звена 3 на звено 2 в паре B . Построим это уравнение. Векторы \bar{P}_{1-2} и \bar{P}_2 уже построены на плане сил для всей группы, поэтому для построения вектора \bar{P}_{3-2} достаточно соединить начало вектора \bar{P}_{1-2} и конец \bar{P}_2 .

Группа 2-го вида (рис. 117). Дано: P_2 , P_3 , M_2 и M_3 . Требуется определить \bar{P}_{1-2} , \bar{P}_{3-2} , \bar{P}_{4-3} и плечо h приложения [силы \bar{P}_{4-3} .

Из условия равновесия звена 2 имеем]

$$\sum M_B = M_2 + M_B(P_2) + P_{1-2}^t (AB) = 0,$$

откуда

$$P_{1-2}^t = - \frac{M_2 + M_B(P_2)}{AB}.$$

Из условия равновесия сил, приложенных ко всей группе

$$\sum \bar{P} = \bar{P}_{1-2}^n + \bar{P}_{1-2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4-3} = 0.$$

Направление силы \bar{P}_{4-3} известно: $\perp xx$. Построив это уравнение, аналогично предыдущему, получим неизвестные силы \bar{P}_{1-2} и \bar{P}_{4-3} .

Для звена 2 имеем

$$\sum \bar{P} = \bar{P}_{1-2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3-2} = 0.$$

Построением этого уравнения [находим силу \bar{P}_{3-2} — действие звена 3 на звено 2 в паре B .

Для звена 3

$$\sum M_B = M_B + M_B(P_3) + hP_{4-3} = 0,$$

откуда неизвестное плечо приложения силы P_{4-3}

$$h = - \frac{M_B + M_B(P_3)}{P_{4-3}}$$

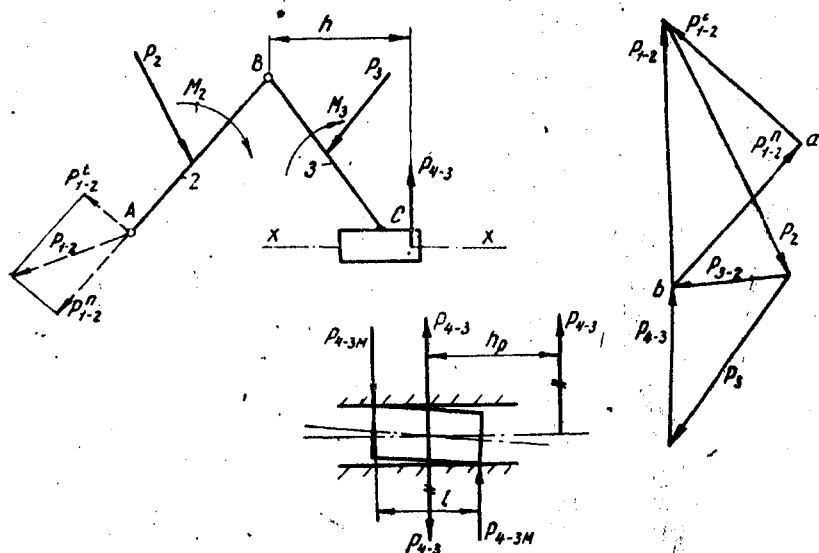


Рис. 117.

Если при численных расчетах величина h имеет знак $-$, это означает, что силу P_{4-3} следует расположить на расстоянии h по другую сторону от точки B .

Очень часто при решении задачи плечо h получают такое, что сила P_{4-3} оказывается далеко за пределами той кинематической пары, в которой она действует. Поэтому после проведения расчетов следует установить, каким образом сила P_{4-3} воспринимается звеньями пары.

Пусть плечо приложения силы P_{4-3} относительно поступательной пары будет h_p (см. рис. 117). Прикладывая в центре пары две равные и противоположно направленные силы P_{4-3} , получим силу P_{4-3} и пару сил, момент которой равен $h_p P_{4-3}$. Под действием активной силы \bar{P}_3 и момента M_3 ползун повернется и со стороны направляющей будет испытывать давление $P_{4-3M} = \frac{h_p P_{4-3}}{l}$ в двух крайних точках.

Таким образом, действие силы P_{4-3} на плече h будет в действительности передаваться как сила P_{4-3} , приложенная по оси ползуна, и пара сил P_{4-3M} , приложенная на плече l .

Группа 3-го вида (рис. 118). Дано: P_2 , P_3 , M_2 и M_3 . Требуется определить \bar{P}_{1-2} , \bar{P}_{3-2} , \bar{P}_{4-3} и плечо h приложения силы \bar{P}_{3-2} .

Неизвестные силы \bar{P}_{1-2} и \bar{P}_{4-3} раскладываем на две силы

$$\bar{P}_{1-2}^n \perp xx \text{ и } \bar{P}_{1-2}^t \parallel xx; \bar{P}_{4-3}^n \perp xx \text{ и } \bar{P}_{4-3}^t \parallel xx.$$

Сила \bar{P}_{3-2} направлена $\perp xx$.

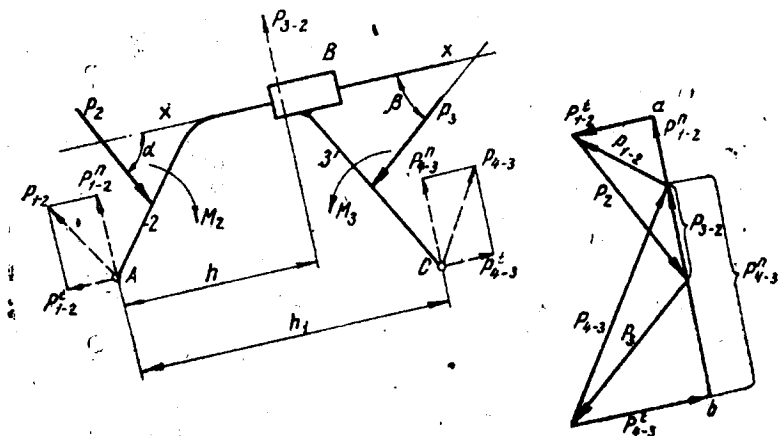


Рис. 118.

Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, имеем

$$\sum n_{P_x} = P_2 \cos \alpha + P_{1-2}^t = 0$$

и

$$P_{1-2}^t = -P_2 \cos \alpha,$$

приложенных к звену 3

$$\sum n_{P_x} = P_3 \cos \beta + P_{4-3}^t = 0 \text{ и } P_{4-3}^t = -P_3 \cos \beta.$$

Для группы

$$\sum \bar{P} = \bar{P}_{1-2}^n + \bar{P}_{1-2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4-3}^t + \bar{P}_{4-3}^n = 0.$$

Построим это уравнение в масштабе $k_p \left[\frac{кг}{мм} \right]$. Из точки a отложим \bar{P}_{1-2}^t , затем \bar{P}_2 , \bar{P}_3 и \bar{P}_{4-3}^t . Из точки b (конца \bar{P}_{4-3}^t) проводим прямую $\perp xx$ — направление \bar{P}_{4-3}^n и \bar{P}_{1-2}^n . Эта прямая должна пройти через точку a . Таким образом, полученный вектор, изображаемый отрезком ab , представляет собой сумму двух векторов \bar{P}_{4-3}^n

и \bar{P}_{1-2}^n . Найдем эти векторы. Обозначим плечо силы \bar{P}_{4-3}^n относительно точки A через h_1 . Из условия равновесия сил, приложенных к группе, имеем

$$\sum M_A = M_A(P_2) + M_2 + M_A(P_3) + M_3 + M_A(P_{4-3}^t) + P_{4-3}^n h_1 = 0,$$

откуда

$$P_{4-3}^n = - \frac{M_A(P_2) + M_2 + M_A(P_3) + M_3 + M_A(P_{4-3}^t)}{h_1}.$$

Величину \bar{P}_{4-3}^n откладываем от точки b по линии ab . Отрезок от конца \bar{P}_{4-3}^n до точки a определяет \bar{P}_{1-2}^n в масштабе h_p . Для нахождения \bar{P}_{3-2} рассмотрим равновесие сил, приложенных к звену 2: $\sum \bar{P} = \bar{P}_{1-2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3-2} = 0$. На плане сил (см. рис. 118) первые две силы уже построены, поэтому \bar{P}_{3-2} , имея направление $\perp xx$, пройдет от конца \bar{P}_2 к началу \bar{P}_{1-2} . Точка приложения \bar{P}_{3-2} будет на расстоянии h , которое определяем из условия равновесия сил, приложенных к звену 2

$$\sum M_A = M_A(P_2) + M_2 + P_{3-2} h = 0,$$

откуда

$$h = - \frac{M_A(P_2) + M_2}{P_{3-2}}.$$

Действительное давление в поступательной паре B определяем аналогично тому, как это было сделано для поступательной пары в группе 2-го вида.

Группа 3-го класса

Дано: силы и моменты сил, приложенные к звеньям группы (рис. 119). Требуется определить давления во всех кинематических парах.

Построения в данном случае аналогичны всем предыдущим, поэтому рассмотрим только последовательность решения данной задачи.

1. Определяем \bar{P}_{1-2}^t , \bar{P}_{6-5}^t и \bar{P}_{7-4}^t из условия равновесия сил, приложенных к звеньям 2, 4 и 5. Это условие позволяет получить уравнения

$$\sum M_{B_i} = 0; \quad \sum M_D = 0 \quad \text{и} \quad \sum M_C = 0.$$

2. Отыскиваем точку S — особую точку Ассура и рассматриваем равновесие всех сил, приложенных к группе. В результате получаем $\sum M_S = 0$. Из этого уравнения определяем \bar{P}_{6-5}^n .

3. Из условия равновесия сил, приложенных ко всем звеньям группы, имеем $\sum \bar{P} = 0$. Построив силовой многоугольник для этого уравнения, определяем неизвестные \bar{P}_{1-2}^n и \bar{P}_{7-4}^n .

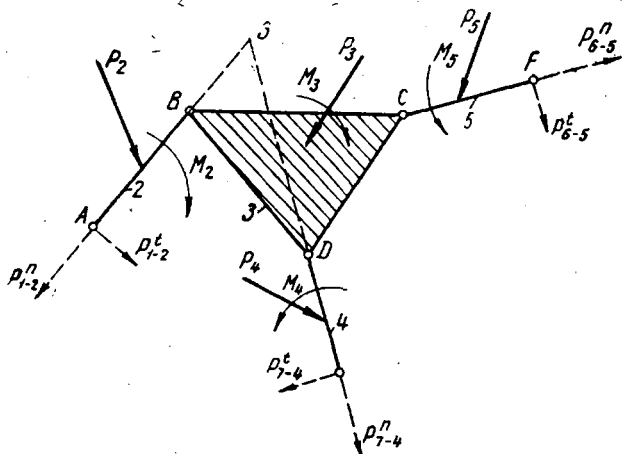


Рис. 119.

4. Определяем давления в парах B , C и D из условия равновесия сил, приложенных к звеньям 2, 4 и 5. Для каждого звена составляем уравнения $\sum \bar{P} = 0$.

Ведущее звено

На ведущее звено 1 в паре A , к которой присоединяются звенья механизма, со стороны звена 2 действует сила \bar{P}_{2-1} (рис. 120). Дви-

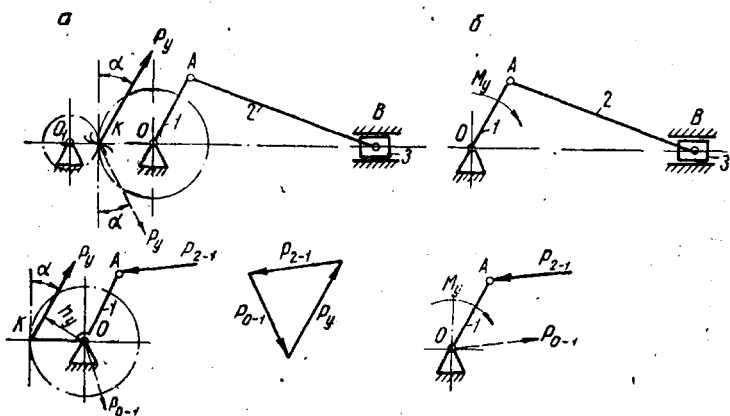


Рис. 120.

жение ведущего звена для машины-орудия может осуществляться от двигателя через зубчатую передачу (рис. 120, а) или через муфту (рис. 120, б). В первом случае воздействие привода будет в виде силы \bar{P}_y , передаваемой через зубцы зацепления и направленной под углом зацепления α , во втором — в виде момента M_y . Если же рассматривается машина-двигатель, то P_y и M_y будут соответственно сила и момент сопротивления той машины, которую приводит двигатель.

Таким образом, в первом случае силы, действующие на ведущее звено, будут \bar{P}_{2-1} (действие 2-го звена), \bar{P}_{0-1} (действие нулевого звена-стойки) и \bar{P}_y (уравновешивающая сила). Неизвестными будут \bar{P}_y и \bar{P}_{0-1} .

Силу \bar{P}_y можно определить из уравнения

$$\Sigma M_O = M_O(P_{2-1}^I) + P_y h_y = 0,$$

откуда

$$P_y = - \frac{M_O(P_{2-1})}{h_y},$$

а \bar{P}_{0-1} — из уравнения $\Sigma \bar{P} = \bar{P}_y + \bar{P}_{2-1} + \bar{P}_{0-1} = 0$. Построив это уравнение в масштабе, находим неизвестную силу \bar{P}_{0-1} .

В том случае, когда к ведущему звену приложен M_y — уравновешивающий момент,

$$M_y = - M_O(P_{2-1}) \text{ и } \bar{P}_{0-1} = - \bar{P}_{2-1}.$$

Как и ранее, здесь везде при составлении уравнений статики принимается алгебраическая сумма членов.

§ 33. Силовой расчет дифференциальных и планетарных механизмов

При проведении силового расчета дифференциальных и планетарных механизмов полагаем, что известны геометрические параметры зубчатого зацепления и момент M_B , приложенный к водилу. Задача может быть поставлена и несколько иначе: известен момент, приложенный к зубчатому колесу 1, а момент M_B неизвестен (рис. 121). Однако, как будет показано ниже, это ничего принципиально не изменяет в решении задачи.

Для всех рассматриваемых схем механизмов определяем силы, действующие в кинематических парах звена 2—2'. Силы, действующие в кинематических парах других звеньев, либо являются результатом воздействия звена 2—2', тогда они уже известны, либо определяются обычным путем.

К звену 2 (см. рис. 121) прикладываем силы \bar{P}_{3-2} и \bar{P}_{1-2} , которые направлены под углом зацепления α к общей касательной к начальным окружностям зубчатых колес, и \bar{P}_{B-2} — действие водила B на звено 2: $P_{B-2} = \frac{M_B}{R_1 + R_2}$. Каждую из сил \bar{P}_{1-2} и \bar{P}_{3-2}

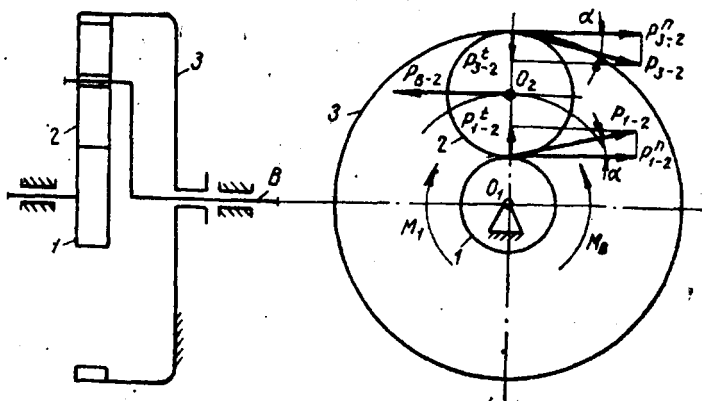


Рис. 121.

раскладываем на две составляющие. Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2, имеем:

$$P_{B-2}R_2 + P_{3-2}^n 2R_2 = 0$$

(сумма моментов здесь, как и в дальнейшем, принимается алгебраической) и $P_{3-2}^n = -\frac{P_{B-2}}{2}$. С другой стороны,

$$P_{B-2} \cdot R_2 + P_{1-2}^n \cdot 2R_2 = 0 \text{ и } P_{1-2}^n = -\frac{P_{B-2}}{2}.$$

Тогда

$$P_{1-2} = P_{3-2} = -\frac{P_{B-2}}{2 \cos \alpha} \text{ и } P_{1-2}^t = P_{3-2}^t = -\frac{P_{B-2}}{2} \sin \alpha.$$

Момент $M_1 = P_{1-2}^n R_1$.

Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2—2' (рис. 122), имеем:

$$P_{B-2}R_2 + P_{3-2}^n (R_2' + R_2) = 0.$$

Тогда

$$P_{3-2}^n = -P_{B-2} \frac{R_2}{R_2' + R_2} \text{ и } P_{B-2} \cdot R_2' + P_{1-2}^n (R_2 + R_2') = 0,$$

откуда

$$P_{1-2}^n = -P_{B-2} \cdot \frac{R_2'}{R_2 + R_2'}$$

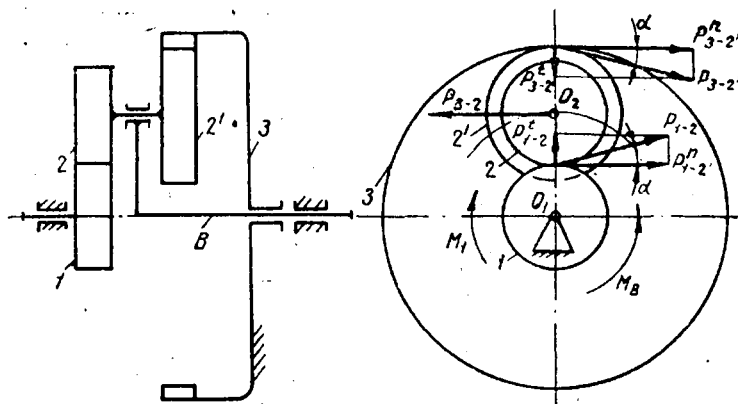


Рис. 122.

Из условия равновесия сил, приложенных к звену 2—2' (рис. 123), имеем

$$P_{B-2}R_2' + P_{1-2}^n(R_2' - R_2) = 0$$

и

$$P_{B-2}R_2 + P_{3-2}'(R_2' - R_2) = 0,$$

откуда

$$P_{1-2}^n = -P_{B-2} \frac{R_2'}{R_2' - R_2} \text{ и } P_{3-2}' = -P_{B-2} \frac{R_2}{R_2' - R_2}$$

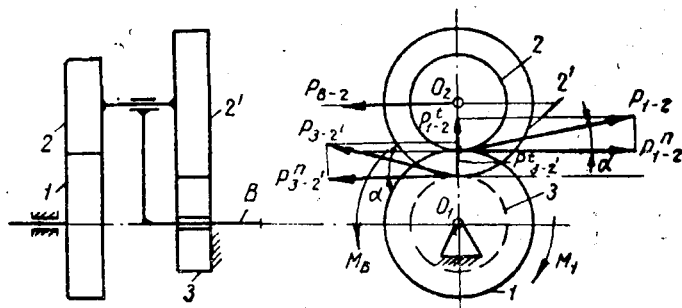


Рис. 123.

Здесь \bar{P}_{1-2}^n и \bar{P}_{3-2}' могут иметь чрезвычайно большие значения при малой величине разности $R_2' - R_2$. Следовательно, при исполь-

зовании такой схемы планетарного механизма, как схемы силовой передачи, надо быть очень внимательным при выборе соотношений между радиусами начальных окружностей зубчатых колес 2 и 2', не допуская чрезмерно больших давлений в зубчатых зацеплениях. Следует обратить внимание и на то, что вследствие возможных больших усилий в зубчатых зацеплениях этой схемы внутренняя мощность, передаваемая ими, резко повышается. Это определяет низкий к. п. д. такого механизма.

§ 34. Последовательность силового расчета механизмов

На рис. 124 показан механизм, состоящий из группы ведущих звеньев, к которой присоединены группы *ABC* и *DEF* с приложен-

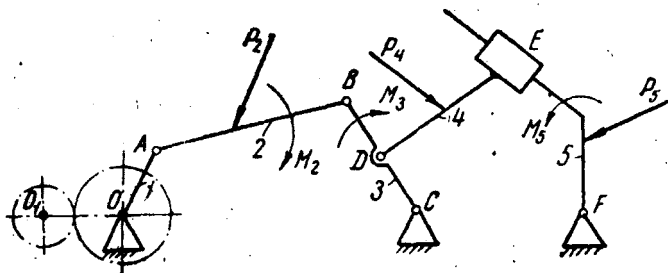


Рис. 124.

ными к его звеньям силами. Установим последовательность силового расчета такого механизма. Если начать расчет механизма с ведущего звена *OA*, то неизвестными будут силы в парах *O* и *A*. Кроме того, будет неизвестна уравновешивающая сила P_y , приложенная в зацеплении зубчатых колес. Таким образом, будет 5 неизвестных, так как силы в парах *O* и *A* дают по 2 неизвестных каждая (величина и направление).

Для определения этих неизвестных можно составить только 3 уравнения статики, рассмотрев равновесие сил, приложенных к звену *OA*. Следовательно, начинать расчет с ведущего звена нельзя. Если же начать силовой расчет с группы *ABC*, то можно составить только 6 уравнений статики, неизвестных же будет 8 — давления в парах *ABC* и *D*. Поэтому начинать силовой расчет с группы *ABC* тоже нельзя. Остается последняя группа *BEF*, рассмотрев которую найдем давление в парах *D*, *E* и *F*. Это уже дает возможность решить задачу силового расчета группы *ABC*, так как давление в паре *D* будет уже известно. Затем можно переходить к расчету ведущего звена.

Следовательно, устанавливается вполне определенная последовательность силового расчета механизма. Начинается расчет с послед-

ней группы в порядке присоединения их к механизму 1-го класса, затем ведется расчет предпоследней группы и т. д. и заканчивается ведущим звеном.

§ 35. Применение принципа возможных перемещений для определения уравнивающей силы. Теорема Н. Е. Жуковского о жестком рычаге

Принцип возможных перемещений для определения уравнивающей силы был впервые применен Н. Е. Жуковским. Полученное им решение позволяет без каких-либо промежуточных вычислений определять уравнивающую силу. Метод Н. Е. Жуковского

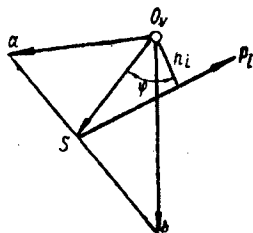
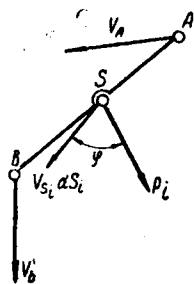


Рис. 125.

используется для контроля при силовом расчете механизмов и решении задач динамики.

Согласно принципу возможных перемещений, сумма элементарных работ сил активных и инерции, приложенных к системе на их возможных перемещениях, равна нулю.

Механизмы являются системами принужденного движения, т. е. имеют не просто возможные, а действительные перемещения точек звеньев, движение которых определяется законом движения ведущего звена. Поэтому элементарную работу сил, приложенных к звеньям механизма, будем рассматривать на их действительных перемещениях.

Обозначим через P_1, P_2, \dots, P_n силы активные и инерции, приложенные к точкам звеньев механизма, через dS_1, dS_2, \dots, dS_n — проекции элементарных действительных перемещений этих точек на направления соответствующих сил. Тогда на основании принципа возможных перемещений

$$\sum_1^n P_i dS_i = 0. \quad (102a)$$

Найдем выражение элементарной работы силы на ее элементарном перемещении.

Пусть имеется звено AB , скорости точек (рис. 125) которого известны. В точке S звена приложена сила P_i под углом φ к скорости v_S точки S . Для этого звена построим план скоростей в масштабе k_v . Силу P_i повернем на угол 90° (безразлично в какую

сторону) и перенесем на план скоростей в точку s . Плечо этой силы относительно полюса O_v плана скоростей обозначим через h_i .

Работа силы P_i на ее элементарном перемещении $A_i = P_i ds_i \cos \varphi$, но $ds_i = v_s dt = (O_v s) k_v dt$, тогда $A_i = P_i (O_v s) \cos \varphi k_v dt$. Из плана скоростей видно, что $(O_v s) \cos \varphi = h_i$, поэтому $A_i = P_i h_i k_v dt$. Здесь $P_i h_i = M_{O_v}(P_i)$ — момент силы P_i относительно полюса плана скоростей. Окончательно имеем $A_i = M_{O_v}(P_i) k_v dt$. Подставим это значение работы силы в выражение (102a) и сократим на общий множитель $k_v dt$, получим

$$\sum_1^n M_{O_v}(P_i) = 0. \quad (102b)$$

Это выражение говорит о том, что *сумма моментов сил активных и инерций, повернутых на угол 90° и перемещенных с механизма в одноименные точки плана скоростей относительно полюса плана скоростей, равна нулю*. Это и есть теорема Н. Е. Жуковского о жестком рычаге, так как полученное выражение показывает, что план скоростей можно представить как жесткий рычаг, закрепленный в точке полюса плана скоростей, находящийся в равновесии под действием этих сил.

Пользуясь этой теоремой, определим уравнивающую силу. Обозначим силы, приложенные к механизму, через P_1, P_2, \dots, P_n , P_y — уравнивающая сила, а плечи этих сил, повернутых на угол 90° и перенесенных в одноименные точки плана скоростей, через $h_1, h_2, \dots, h_n, h_y$. Тогда по теореме Н. Е. Жуковского

$$\sum_1^n P_i h_i + P_y h_y = 0,$$

откуда

$$P_y = - \frac{\sum_1^n P_i h_i}{h_y}.$$

При определении P_y этим способом моменты сил, действующие на звенья, следует разложить на пары сил, приложенные в теу точках звеньев, скорости которых известны, т. е. уже построены на плане скоростей. Далее с этими силами уже поступают, как и со всеми другими силами.

§ 36. Трение в кинематических парах

В зависимости от вида относительного движения различают трение скольжения и трение качения.

Трение скольжения можно разделить на несколько видов:

1) сухое — трущиеся поверхности непосредственно контактируют друг с другом;

2) жидкостное — между поверхностями имеется слой жидкой смазки и они не имеют точек непосредственного контакта;

3) полусухое — между поверхностями имеется небольшой слой смазки, однако имеется много точек их непосредственного контакта;

4) полужидкостное — между поверхностями имеется слой жидкой смазки, но они непосредственно контактируют в некоторых точках.

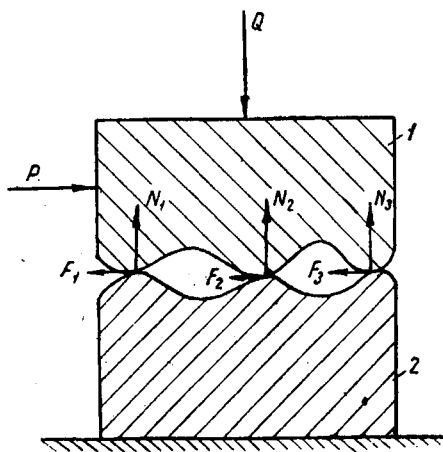


Рис. 126.

но 1 действует вертикальная сила Q и горизонтальная P , то в местах контакта будут возникать силы N_i и F_i , которые уравниваются соответственно силами $Q = \sum_1^n N_i$ и P . Сила трения скольже-

ния $F = \sum_1^n F_i$. Силы трения F_i в местах контакта представляют собой силы, препятствующие относительному смещению поверхностей, и являются результатом молекулярного сцепления материалов поверхностей, упругой и пластической деформаций и хрупкого разрушения выступов поверхностей. Кроме того, в местах контакта происходит взаимное притяжение и диффузия молекул материалов звеньев, нагрев поверхностей при их относительном смещении и окисление. Все это влияет на величину сил трения F_i . Таким образом, силы трения являются результатом целого ряда процессов, происходящих на поверхностях контакта трущихся тел.

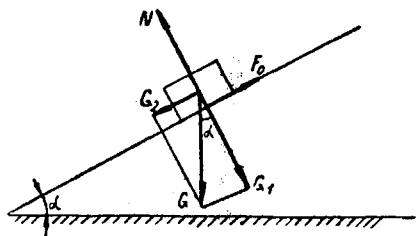


Рис. 127.

Введем понятие угла трения и коэффициента трения скольжения. Поместим плоский ползун весом G на наклонную плоскость с углом наклона α к горизонту (рис. 127). Со стороны плоскости на ползун будет действовать сила нормального давле-

ния N и сила трения F_0 , препятствующая перемещению ползуна вниз по наклонной плоскости. Полагаем, что ползун под действием этих сил находится в покое. Составляющие веса будут равны:

$$G_1 = G \cos \alpha \quad \text{и} \quad G_2 = G \sin \alpha.$$

Из условия равновесия сил, приложенных к ползуну имеем:

$$F_0 = G_2 = G \sin \alpha; \quad (103)$$

$$N = G_1 = G \cos \alpha. \quad (104)$$

Разделив выражение (103) на выражение (104), получим:

$$\frac{F_0}{N} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (105)$$

Экспериментальным путем установлено, что при данном состоянии поверхностей ползуна и наклонной плоскости ползун будет находиться в покое при $\alpha \leq \varphi_0$.

Следовательно, при $\frac{F_0}{N} \leq \operatorname{tg} \varphi_0$.

Обозначим $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$, тогда

$$F_0 \leq f_0 N. \quad (106)$$

Величины φ_0 и f_0 называются соответственно углом и коэффициентом статического трения (трения покоя). Таким образом, сила трения покоя меньше или равна произведению коэффициента трения на нормальное давление. Знак равенства будет в предельном случае покоя, во всех же остальных случаях

покоя сила трения будет определяться как реакция связи из условия равновесия сил, приложенных к ползуну.

При угле наклонной плоскости $\alpha = \varphi$ ползун будет перемещаться с постоянной скоростью. В этом случае силы, действующие на ползун, будут находиться в равновесии и сила трения

$$F = fN, \quad (107)$$

где $f = \operatorname{tg} \varphi$;

f и φ — соответственно коэффициент трения и угол трения при движении.

В большинстве случаев сила трения при движении меньше предельного значения силы трения покоя, т. е. $F < F_0$, $\varphi < \varphi_0$, $f < f_0$ и направлена в обратную сторону относительной скорости. Составляющие силы трения по двум взаимно перпендикулярным осям будут пропорциональны составляющим относительной скорости в направлении этих осей. На рис. 128 показан ползун (вид сверху),

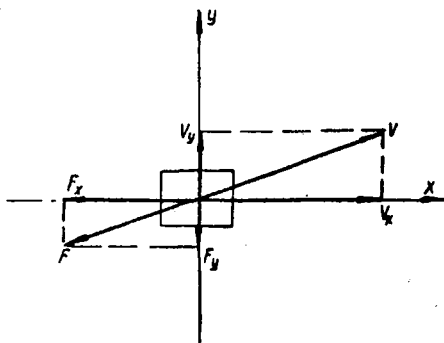


Рис. 128.

перемещающийся по горизонтальной плоскости со скоростью u . Так как сила $F = fN$, то составляющие силы

$$F_x = F \frac{v_x}{v} \quad \text{и} \quad F_y = F \frac{v_y}{v}$$

будут всегда меньше силы F .

При движении ползуна относительно плоскости с какой-либо скоростью сила трения вся реализуется в направлении этой скорости, поэтому в перпендикулярном направлении сила трения покоя будет равна нулю.

Трение скольжения

Поступательная пара. Рассмотрим плоский ползун на горизонтальной плоскости под действием силы P (рис. 129), приложенной к ползуну под углом α к нормали. На ползун в этом случае будут действовать еще две силы: N — нормальное давление со стороны плоскости и F — сила трения.

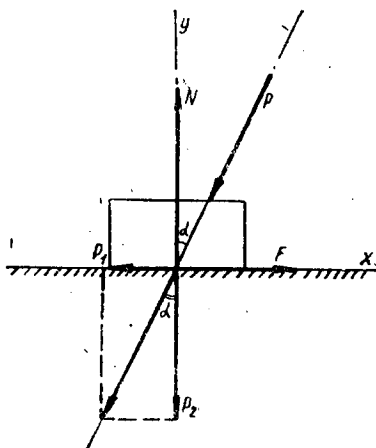


Рис. 129.

Возможны три случая: 1) ползун находится в покое; 2) ползун перемещается с постоянной скоростью (или находится в покое — предельное положение); 3) ползун перемещается с ускорением.

Установим, при каких условиях приложения P возможен каждый из случаев. Силу P перенесем по линии ее действия и разложим на две составляющие P_1 и P_2 . Тогда сила нормального давления

$$N = P_2 = P \cos \alpha,$$

сила, стремящаяся переместить ползун

$$P_1 = P \sin \alpha,$$

сила трения, удерживающая ползун,

$$F < fN \quad \text{или} \quad F \leq fP \cos \alpha$$

(в случае покоя $F = F_0$ и $f = f_0$).

Ползун находится в покое при условии

$$P_1 < F_0 \quad \text{или} \quad P \sin \alpha < f_0 P \cos \alpha,$$

откуда получим $\operatorname{tg} \alpha < f_0$, а так как $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, то окончательно будем иметь $\alpha < \varphi_0$. Следовательно, ползун будет находиться в покое, если сила P приложена к ползуну под углом α к нор-

мали поверхности трения, меньшим, чем угол трения. Это условие не зависит от величины P . При $P_1 = F_0$ — предельный случай покоя; $P_1 = F$ — движение с постоянной скоростью.

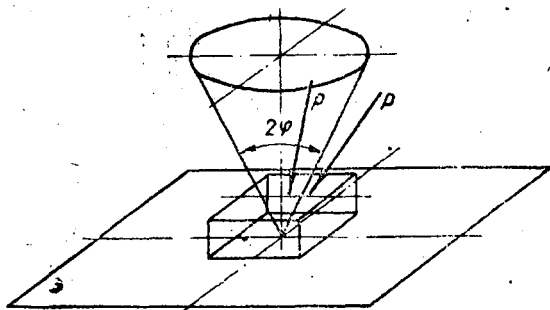


Рис. 130.

Рассуждая аналогично предыдущему, получим соответственно

$$\alpha = \varphi_0 \text{ и } \alpha = \varphi.$$

Ползун перемещается с ускорением, если

$$P_1 > F,$$

откуда, аналогично предыдущему, имеем $\alpha > \varphi$.

Если данную задачу рассматривать не только в плоскости чертежа, а во всех возможных плоскостях, то в предельном положении, когда $\alpha = \varphi$, сила P опишет коническую поверхность с центральным углом 2φ (рис. 130), называемую конусом трения. Если сила P приложена за пределами конуса трения ($\alpha > \varphi$), то движение ползуна будет ускоренным, если сила P приложена в пределах конуса трения ($\alpha < \varphi$), то ползун не будет перемещаться под действием этой силы.

Введем понятие равнодействующей сил трения и нормального давления. К плоскому ползуну, находящемуся на горизонтальной плоскости, приложена вертикальная сила Q и горизонтальная сила P . Полагаем, что под действием этих сил ползун либо перемещается с постоянной скоростью, либо находится в предельном случае покоя, т. е. $F = fN$ (рис. 131).

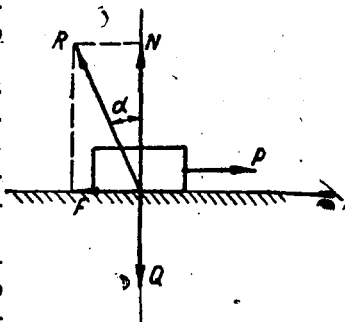


Рис. 131.

Равнодействующая сил трения и нормального давления $\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$. Найдем угол α , который составляет сила R с нормалью. Из рис. 131 имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{N} = \frac{fN}{N} = f = \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда $\alpha = \varphi$, т. е. равнодействующая сила трения и нормального давления отклонена от направления нормали на угол трения в обратную сторону относительного движения (в случае предельного люфта — на угол φ_0 в обратную сторону действия силы P).

Рассмотрим общий случай положения плоского ползуна на наклонной плоскости (рис. 132). Ползун, на который действует вертикальная сила Q , перемещается вверх с постоянной скоростью вдоль наклонной плоскости под действием силы P , приложенной к ползуну под углом β к вертикали. Установим величину силы P . Заменяя

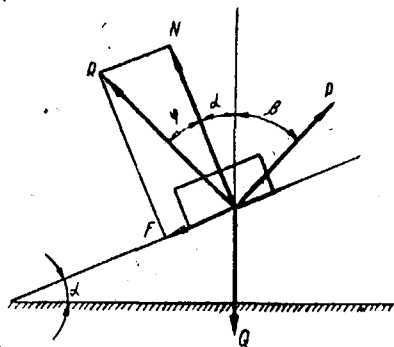


Рис. 132.

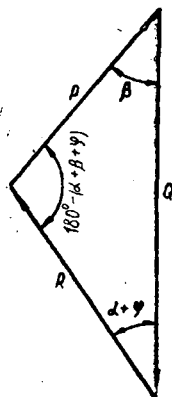


Рис. 133.

силу трения F и нормальное давление N их равнодействующей R , имеем ползун, находящийся под действием трех сил Q , P и R . Из условия равновесия сил $\vec{Q} + \vec{P} + \vec{R} = 0$. В силовом треугольнике (рис. 133) неизвестными будут силы R и P . Используя теорему синусов, получим

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{Q}{\sin[\pi - (\alpha + \beta + \varphi)]},$$

откуда

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}. \quad (108)$$

Аналогично предыдущему можно записать

$$R = Q \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)},$$

а так как $F = R \sin \varphi$ и $N = R \cos \varphi$, то

$$F = Q \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)} \quad \text{и} \quad N = Q \frac{\sin \beta \cos \varphi}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}.$$

Найдем угол β , при котором сила P будет минимальной. Значение силы P_{\min} будет при максимальной величине знаменателя в выражении для P , т. е. при $\sin(\alpha + \beta + \varphi) = 1$ или при $\alpha + \beta + \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $P_{\min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$ и будет направлена под углом φ к плоскости, по которой перемещается ползун (рис. 134).

Рассмотрим *клинчатый ползун*, поверхность трения которого имеет форму клина с центральным углом β (рис. 135). На ползун действует вертикальная сила Q и горизонтальная сила P , перемещающая ползун вдоль направляющей с постоянной скоростью. Со стороны плоскости на ползун будут действовать две нормальные силы N и две силы трения F . Найдем силу P . Из условия равновесия сил

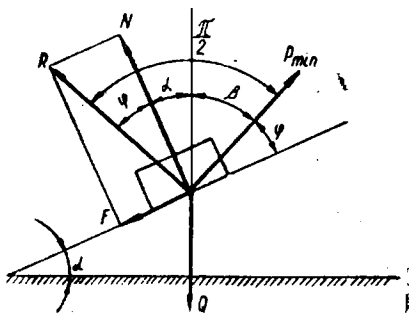


Рис. 134.

$$N = \frac{Q}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \text{ и } P = 2F = 2fN.$$

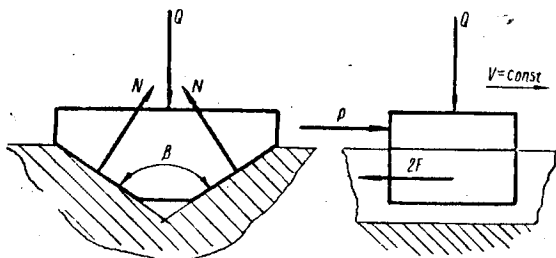


Рис. 135.

Подставляя N в выражение для P , получим

$$P = \frac{f}{\sin \frac{\beta}{2}} Q. \quad (109)$$

Обозначим $f' = \frac{f}{\sin \frac{\beta}{2}}$, тогда можно записать $P = f'Q$. Здесь

f' — приведенный коэффициент трения клинчатой поверхности. Пользуясь этой величиной, можно клинчатую по-

верхность, по которой перемещается ползун, рассматривать как плоскую с коэффициентом трения f' и углом трения $\varphi' = \text{arctg } f'$. Следовательно, все решения, полученные для плоского ползуна, будут справедливы и для клинчатого ползуна, но уже с величинами f' и φ' .

Винтовая пара. При определении силовых зависимостей в винтовой кинематической паре допускаем, что удельное давление по опорной поверхности винтовой нарезки распределяется равномерно. Пространственную задачу заменяем плоской, разворачивая среднюю линию винтовой нарезки на плоскость.

Рассмотрим два случая.

1. Винтовая пара с прямоугольной нарезкой. На основании первого допущения расчетную схему можно представить в виде, изображенном на рис. 136. Здесь осевая сила взаимодействия винта и гайки Q представлена как сила, действующая на ползун, который находится на винтовой нарезке со средним радиусом r . Сила P (условная), перемещающая ползун, является результатом приложения искомой силы P_1 , создающей момент M . На основании второго допущения ползун будет находиться на наклонной плоскости с углом наклона α , равным углу

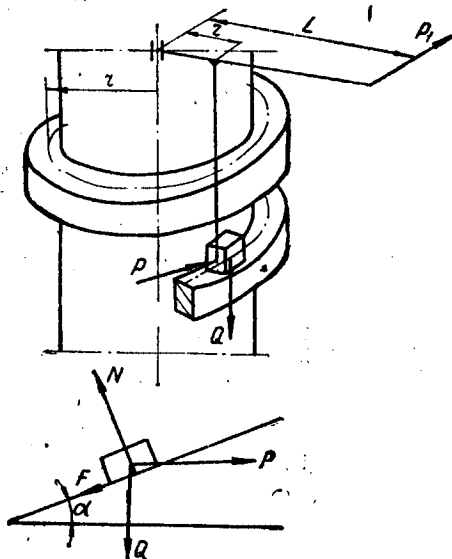


Рис. 136.

подъема средней линии винтовой нарезки.

На ползун действуют силы P и Q , нормальная сила N со стороны плоскости и сила трения F . Полагаем, что ползун перемещается вверх по наклонной плоскости, т. е. в обратную сторону действия осевой силы Q , с постоянной скоростью. P определим по выражению (108) для общего случая положения ползуна на наклонной плоскости при $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

и

$$M = P_1 L = Q r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (110)$$

Если же ползун под действием этих сил будет перемещаться вниз по наклонной плоскости, т. е. в сторону действия осевой силы в винтовой паре, то

$$M = Q r \operatorname{tg}(\alpha - \varphi), \quad (111)$$

так как сила трения будет уже направлена в обратную сторону, и равнодействующая сил трения и нормального давления будет отклонена от направления нормали на угол трения также в другую сторону, т. е. в этом случае в силовом треугольнике угол между Q и R (см. рис. 133) будет равен $\alpha - \varphi$.

2. Винтовая пара с треугольной (трапецидальной, упорной) нарезкой. Расчетная схема представлена на рис. 137. Движение винта относительно гайки под действием момен-

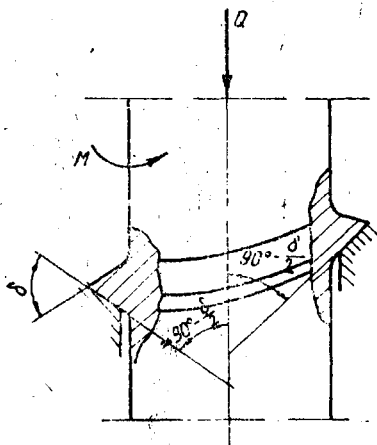


Рис. 137.

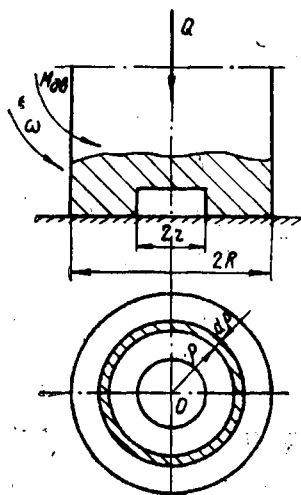


Рис. 138.

та M и осевой силы Q рассматриваем как движение клинчатого ползуна с центральным углом $2\left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right)$, где δ — центральный угол нарезки.

Приведенный коэффициент трения

$$f' = \frac{f}{\sin\left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right)} = \frac{f}{\cos \frac{\delta}{2}}, \quad (112)$$

а угол трения

$$\varphi' = \arctg f'.$$

Момент

$$M = Qr \operatorname{tg}(\alpha + \varphi') \quad (113)$$

при относительном движении в обратную сторону действия силы Q и

$$M = Qr \operatorname{tg}(\alpha - \varphi') \quad (114)$$

при относительном движении в сторону действия силы Q .

Плоская кольцевая пята. В плоской кольцевой пяте (рис. 138) при определении момента трения на кольцевой поверхности будем рассматривать два случая.

1. Неиспользуемая пята (редко работающая). При решении задачи исходим из положения, что удельное давление по опорной поверхности пяты распределяется равномерно, т. е.

$$p = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)}. \quad (115)$$

Момент трения на элементарной кольцевой площадке (площадью $2\pi r dr$) (см. рис. 138) будет равен

$$dM = 2\pi r dr p f r$$

или

$$dM = 2\pi f p r^2 dr,$$

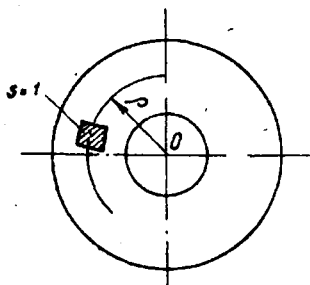


Рис. 139.

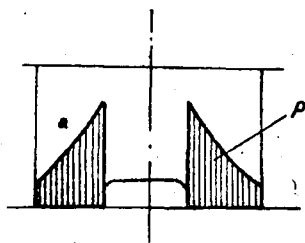


Рис. 140.

откуда момент трения

$$M = 2\pi f p \int_r^R r^2 dr.$$

Подставляя значение p и интегрируя, получим

$$M = \frac{2}{3} f Q \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (116a)$$

Если пята сплошная, т. е. $r=0$, то

$$M = \frac{2}{3} f QR. \quad (116b)$$

2. Приработавшаяся пята (работающая часто и длительное время). Исходим из положения, что износ в каждой точке опорной поверхности пяты одинаков, т. е. в процессе работы пята остается плоской.

Износ в каждой точке определяется мощностью трения, следовательно мощность трения также в каждой точке опорной поверхности пяты будет величиной постоянной.

Для участка с площадью, равной единице (рис. 139), мощность трения

$$A_{\text{тр}} = p f \omega r = \text{const},$$

где ω — угловая скорость вращения вала.

Для каждой точки $\omega = \text{const}$ и $f = \text{const}$, поэтому

$$pQ = C = \text{const.}$$

В этом случае $p = \frac{C}{Q}$, т. е. удельное давление по опорной поверхности распределяется по закону гиперболы (рис. 140).

Используя ранее полученное выражение для элементарного момента и заменяя pQ через C , получаем

$$dM = 2\pi f C Q dq,$$

откуда момент трения

$$M = 2\pi f C \int_r^R Q dq.$$

После интегрирования получим

$$M = \pi f C (R^2 - r^2).$$

Постоянная C определится из следующего условия. Элементарная нормальная сила, действующая на элементарную кольцевую площадку

$$dQ = 2\pi q dr$$

или

$$dQ = 2\pi C dq,$$

откуда

$$Q = \int_r^R 2\pi C dq.$$

После интегрирования находим

$$C = \frac{Q}{2\pi(R-r)}.$$

Подставляя значение C в выражение для момента, получим:

$$M = \frac{1}{2} f Q (R+r). \quad (117a)$$

При $r=0$ имеем

$$M = \frac{1}{2} f QR. \quad (117б)$$

Сопоставляя выражения для момента трения в обоих случаях, видим, что в первом момент трения больше, чем во втором, при равных условиях.

Вращательная кинематическая пара. При определении момента трения во вращательной кинематической паре будем рассматривать случай пары с зазором и без зазора.

Пара с зазором. Радиус внутреннего звена несколько меньше наружного (рис. 141). Величина зазора для практически приемлемых случаев мала, поэтому при решении задачи полагаем, что

радиусы поверхностей звеньев пары одинаковы и равны r , а геометрические оси поверхностей совпадают.

К звену 1 приложим вертикальную силу Q , тогда в точке A контакта со звеном 2 возникает реактивная сила R (см. рис. 141, а). Если к звену 1 приложить момент M (см. рис. 141, б), то оно начнет вращаться и в первое время будет катиться по внутренней поверхности звена 2 до тех пор, пока не наступит состояние равновесия. Угловая скорость ω вращения звена 1 будет при этом постоянной, точка контакта A сместится в сторону от оси. В этом

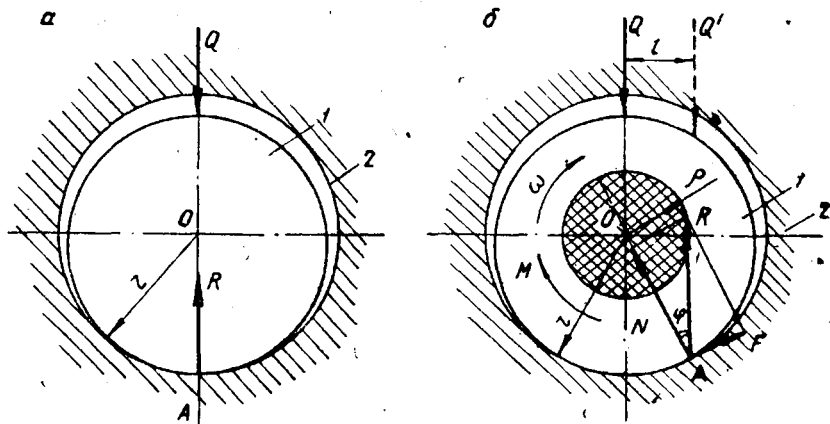


Рис. 141.

случае из условия равновесия сил, приложенных к звену 1, $M = \rho Q$ и $\bar{R} = \bar{Q}$, следовательно, $M = \rho Q$. Сила R является результатом двух составляющих — силы трения F и силы нормального давления N , с которой R образует угол φ , т. е. $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}$.

Из рис. 141 имеем $\rho = r \sin \varphi$. Для малых углов

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = f \text{ и } \rho = fr,$$

тогда

$$M = fQr \quad (118)$$

будет равен моменту трения в паре.

Величина ρ называется радиусом круга трения (см. рис. 141, б). Вращательное движение звена 1 с постоянной угловой скоростью можно поддерживать не только моментом M , но и силой Q' (обозначена пунктирной линией на рис. 141, б), приложенной к звену 1 на плече l . В этом случае момент движущих сил должен быть равен моменту сопротивления — моменту трения, т. е. $l = \rho$, и сила Q' должна быть касательной к окружности круга трения. Если же силу Q' приложить на плече $l < \rho$, т. е. если она пройдет через круг трения, то движение будет невозможно.

Пара без зазора. Определяем момент трения для двух случаев.

1. **Неприработавшаяся пара (редко работающая).** При определении момента трения исходим из предположения, что удельное давление p по опорной поверхности распределяется равномерно, т. е. в каждой точке одинаково (рис. 142).

Обозначим через b протяженность пары. Найдем величину удельного давления p . На поверхности вращающегося звена 1 выделим элементарную площадку bdS с центральным углом $d\varphi$, располагающуюся под углом φ к линии действия силы Q .

На эту площадку будут действовать нормальное давление со стороны опоры dN и сила трения dF .

Значение этих сил будет равно

$$dN = pbdS = pbrd\varphi$$

и

$$dF = fdN = fpbrd\varphi.$$

Сумма проекций этих сил на линию действия силы Q

$$\begin{aligned} dQ &= dN \cos \varphi + dF \sin \varphi = \\ &= pbr (\cos \varphi + f \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Проектируя на вертикальную ось все силы, действующие на вращающееся звено, получим

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} pbr (\cos \varphi + f \sin \varphi) d\varphi = pbr \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi + f \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \right) = \\ &= pbr \left[\left| \sin \varphi \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + f \left| -\cos \varphi \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = 2pbr, \end{aligned}$$

откуда

$$p = \frac{Q}{2br}.$$

Элементарный момент трения на бесконечно малой площадке с площадью $rd\varphi b$

$$dM = rdF = rrd\varphi bpf = fpbr^2 d\varphi.$$

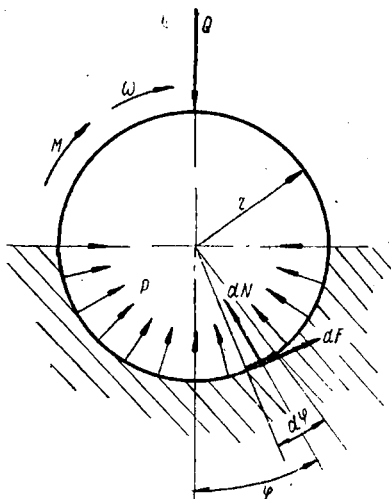


Рис. 142.

Момент трения на всей опорной поверхности

$$M = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f p b r^2 d\varphi = 2 f p b r^2 \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя сюда значение p , будем иметь:

$$M = \frac{\pi}{2} f Q r. \quad (119)$$

2. Приработавшаяся пара (работающая часто и длительное время). При определении момента трения и закона

распределения удельных давлений по опорной поверхности исходим из предположения, что износ в каждой точке опорной поверхности по линии действия силы Q есть величина постоянная, т. е. $\delta_Q = \text{const}$ (рис. 143).

Найдем выражение для удельного давления в произвольной точке опорной поверхности. Мощность сил трения на опорной площадке элемента пары с площадью, равной единице, $A_Q = f p r \omega$. Радиальный износ опоры $\delta_N = \delta_Q \cos \varphi$ пропорционален мощности трения, т. е. $f p r \omega = c_1 \delta_N = c_1 \delta_Q \cos \varphi$, где c_1 — коэффициент пропорциональности, постоянная величина. Следовательно,

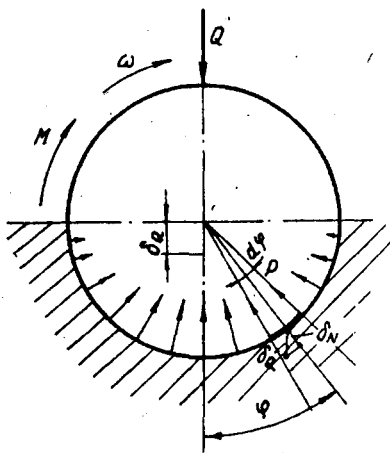


Рис. 143.

$$p = \frac{c_1 \delta_Q}{f r \omega} \cos \varphi.$$

Величины δ_Q , f , r и ω одинаковы для всех точек опорной поверхности, т. е. постоянны для рассматриваемых условий. Поэтому можно принять $\frac{c_1 \delta_Q}{f r \omega} = c$ и $p = c \cos \varphi$, где c — постоянная величина.

При $\varphi = 0$ $\cos \varphi = 1$ и $p = c = p_{\max}$, тогда $p = p_{\max} \cos \varphi$.

Определим p_{\max} . Спроектируем силы, действующие на элементарную площадку (см. рис. 142), на вертикальную ось. Сумма проекций этих сил

$$dQ = dN \cos \varphi + dF \sin \varphi.$$

Здесь

$$dN = b r d\varphi p = b r p_{\max} \cos \varphi d\varphi$$

$$dF = f dN = f b r p_{\max} \cos \varphi d\varphi,$$

и тогда

$$dQ = b r p_{\max} (\cos^2 \varphi d\varphi + f \sin \varphi \cos \varphi d\varphi),$$

откуда величина силы Q будет равна

$$Q = b r p_{\max} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi + f \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi \right).$$

В этом выражении

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = 0, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi),$$

тогда

$$Q = \frac{1}{2} b r p_{\max} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right] = \frac{\pi}{2} b r p_{\max}$$

и

$$p_{\max} = \frac{2Q}{\pi b r}.$$

Элементарный момент трения, как и в предыдущем случае, равен $dM = f p b r^2 d\varphi$. Заменяя p , получим $dM = f b r^2 p_{\max} \cos \varphi d\varphi$. Подставляя вместо p_{\max} его значение, будем иметь:

$$dM = \frac{2}{\pi} f Q r \cos \varphi d\varphi.$$

Момент трения на всей опорной поверхности

$$M = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} f Q r \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} f Q r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} f Q r \left| \sin \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

или

$$M = \frac{4}{\pi} f Q r. \quad (120)$$

Трение качения

Трение качения возникает при относительном перекатывании элементов кинематических пар звеньев. В этом случае имеет место внутреннее и внешнее трение со всеми сопровождающими их явле-

ниями. Существует несколько гипотез, объясняющих природу трения качения. Рассмотрим одну из них.

На горизонтальную плоскость поместим цилиндр, находящийся под действием вертикальной силы Q (рис. 144, а). Цилиндр представляет собой упругое тело, поэтому в месте контакта с плоскостью

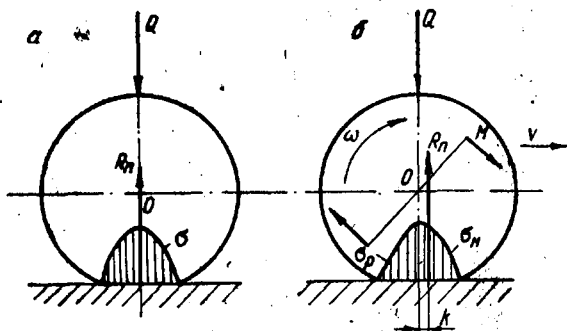


Рис. 144.

он будет упруго деформироваться. Эюра напряжений смятия σ представляет собой симметричную относительно оси цилиндра кривую. Равнодействующая R_n напряжений σ будет равна Q , противоположно ей направлена, а линия ее действия будет совпадать с осью цилиндра.

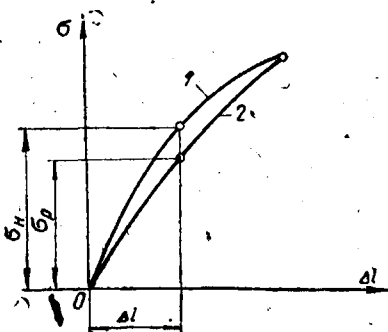


Рис. 145.

К цилиндру приложим пару сил M (рис. 144, б) так, чтобы он катился по плоскости с постоянной скоростью. Сопротивление перекатыванию преодолевается моментом M , т. е. трение качения в данном случае определяется моментом пары сил.

Экспериментальным путем установлено, что момент трения качения пропорционален нагрузке

$$M = kQ. \quad (121)$$

Коэффициент пропорциональности k — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины.

Физический смысл коэффициента трения качения можно установить следующим образом. Если какое-либо упругое реальное тело постепенно нагружать, то зависимость напряжения от деформации будет определяться кривой 1 (рис. 145), если же разгружать, — кривой 2. Это явление носит название упругого гистерезиса. Следовательно, для одной и той же деформации Δl напряжение при нагрузке σ_n больше напряжения при разгрузке σ_p . В процессе перекатывания цилиндра (см. рис. 144, б) по горизонтальной пло-

скости его участки, располагающиеся по направлению движения относительно вертикальной оси, будут нагружаться, а располагающиеся с противоположной стороны — разгружаться. Поэтому эпюра напряжений будет представлять собой уже несимметричную кривую. Равнодействующая $R_n = \bar{Q}$ напряжений будет смещена на величину k в сторону движения. Из условия равновесия сил, приложенных к цилиндру, $M = kQ$, т. е. в данной гипотезе коэффициент трения качения k выступает как плечо, на которое смещена равнодействующая напряжений смятия цилиндра при движении.

Определим величину силы P (рис. 146), под действием которой цилиндр, нагруженный силой Q , будет катиться с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости. С приложением сил Q и P возникают силы R_n — нормальная реакция плоскости и F — сила трения скольжения.

Из условия равновесия сил $R_n = Q$, $F = P$ и

$$\sum M_A = Ph - R_n k = 0,$$

откуда

$$P = \frac{kQ}{h}.$$

Качение цилиндра будет происходить при условии, что значение силы P будет не больше, чем максимальное значение силы $F =$

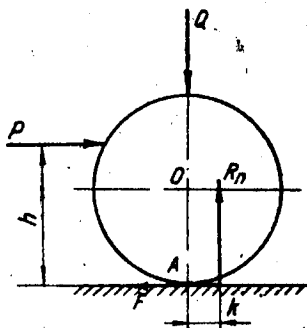


Рис. 146.

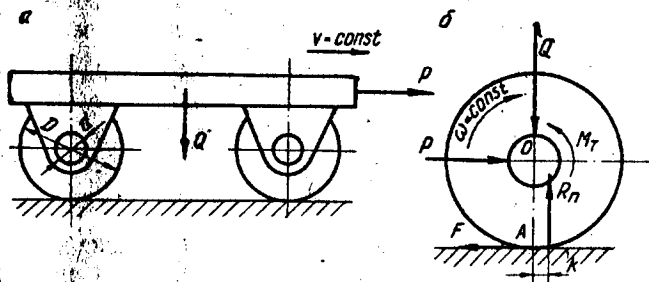


Рис. 147.

$= fQ$. В противном случае цилиндр будет скользить. Следовательно, условие отсутствия скольжения будет при $P < F$ или $\frac{kQ}{h} < fQ$, откуда

$$\text{да имеем } \frac{k}{h} < f.$$

Пример. Тележка с грузом Q (рис. 147, а), перемещается с постоянной скоростью при помощи силы P , значение которой следует определить. Пусть D — диаметр колес тележки; d — диаметр цапф;

k — коэффициент трения качения колеса по рельсу; f — коэффициент трения скольжения цапфы в подшипнике.

Расчетную схему представим в виде одного катка, нагруженного силами Q и P (рис. 147, б). К цапфе будет приложен момент тре-

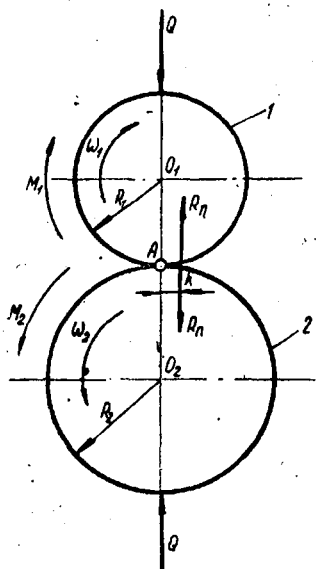


Рис. 148.

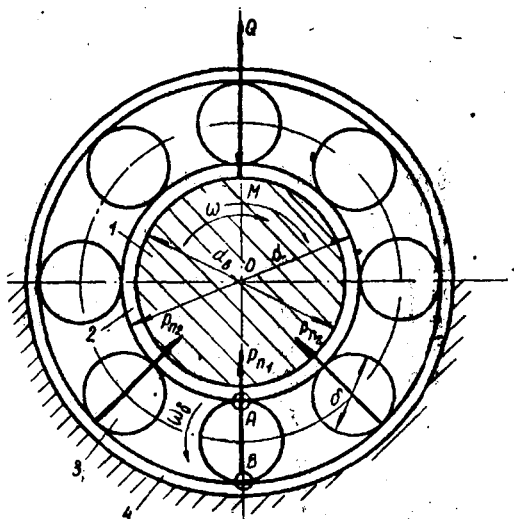


Рис. 149.

ния скольжения M_T , а к колесу со стороны плоскости силы F и R_n . Из условия равновесия сил, приложенных к колесу,

$$R_n = Q, F = P \text{ и } \sum M_A = P \frac{D}{2} - M_T - R_n k = 0.$$

Так как $M_T = fQ \frac{d}{2}$, то из уравнения находим

$$P = Q \left(f \frac{d}{D} + \frac{2k}{D} \right). \quad (122)$$

Для определения сопротивления в подшипнике качения рассмотрим вначале вспомогательную задачу о качении цилиндров 1 и 2, нагруженных силами Q (рис. 148). Каждый из цилиндров с радиусами поверхности R_1 и R_2 , перекатываясь под действием моментов M_1 и M_2 , вращается с постоянной угловой скоростью соответственно ω_1 и ω_2 .

Мощность трения качения, затрачиваемая в точке A контакта цилиндров 1 и 2,

$$N_A = N_{1A} + N_{2A} = M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 = kQ (\omega_1 + \omega_2).$$

В подшипнике качения (рис. 149) усилие Q от вала 1 передается через внутреннее кольцо 2 шариками 3 или роликами, которые опи-

раются на наружное кольцо подшипника 4. При вращении вала с постоянной скоростью ω момент M преодолевает трение качения в местах A и B контакта каждого ролика с внутренним и наружным кольцами подшипника. Мощность трения качения для одного ролика

$$N_p = N_A + N_B = kR_n(\omega + \omega_\delta) + kR_n\omega_\delta = kR_n(\omega + 2\omega_\delta).$$

Угловая скорость шарика $\omega_\delta = \omega \frac{d}{2\delta}$, тогда

$$N_p = kR_n\omega \left(1 + \frac{d}{\delta}\right).$$

Мощность трения качения для всего подшипника

$$N_n = \sum kR_n\omega \left(1 + \frac{d}{\delta}\right) = k\omega \left(1 + \frac{d}{\delta}\right) \sum R_n.$$

Здесь k — коэффициент трения качения ролика по наружному и внутреннему кольцам подшипника.

Если полагать, что роликов в подшипнике бесчисленное множество, то $\sum R_n \approx 1,3Q$, так как задача отыскания $\sum R_n$ — алгебраической суммы нормальных сил, воспринимаемых роликами подшипника, будет аналогична задаче отыскания алгебраической суммы нормальных сил, действующих во вращательной паре.

В результате

$$N_n = 1,3kQ\omega \left(1 + \frac{d}{\delta}\right).$$

Момент трения в подшипнике качения

$$M = 1,3kQ \left(1 + \frac{d}{\delta}\right). \quad (123)$$

Обычно при численных расчетах пользуются понятием приведенного коэффициента трения подшипника качения. В этом случае принимается $M = f_{пр}Q \frac{d_B}{2}$, т. е. момент трения условно рассматривается на поверхности с радиусом, равным $\frac{d_B}{2}$, как момент трения скольжения. Тогда

$$f_{пр} \frac{d_B}{2} Q = 1,3kQ \left(1 + \frac{d}{\delta}\right),$$

откуда

$$f_{пр} = 2,6 \frac{k}{d_B} \left(1 + \frac{d}{\delta}\right).$$

Причем $f_{пр} \approx 0,01$ для подшипников с шариками и со сплошными роликами; $f_{пр} \approx 0,02$ — с витыми роликами.

Глава VII. ДИНАМИКА МАШИН

§ 37. Тахограмма и силы, действующие в машине

Движение машины удобно представить в виде графической зависимости ее скорости в функции времени, называемой тахограммой (рис. 150). Под скоростью движения машины будем понимать

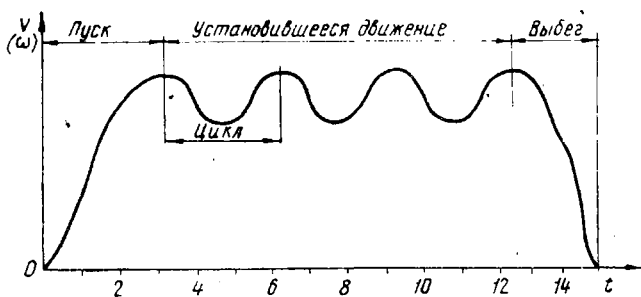


Рис. 150.

угловую скорость движения ее ведущего звена либо окружную скорость точки этого звена. Различают три периода движения машины:

I период — пуск машины или разбег. Скорость машины возрастает от нуля до какой-то определенной величины.

II период — установившееся движение. В общем случае скорость машины меняется от максимального до минимального значений, в частном — может быть постоянной.

III период — выбег или торможение. Скорость машины от какого-то значения падает до нуля.

В период установившегося движения различают *циклы* — время, по истечении которого ведущее звено машины возвращается в первоначальное положение, имея первоначальное значение скорости. Если циклы одинаковы, то движение называется циклическим или периодическим. Движение машины происходит под действием сил, приложенных к звеньям. Различают две группы сил, действующих в машине: силы движущие P_d , под действием которых скорость движения машины возрастает, и силы сопротивления P_c , под действием которых скорость движения маши-

ны уменьшается. Работа движущих сил положительна, сил сопротивления — отрицательна.

Силы сопротивления в свою очередь делятся на силы полезного сопротивления $P_{п.с}$ и вредного сопротивления $P_{в.с}$. Силы полезного сопротивления — это силы, для преодоления которых предназначена машина, например, силы сопротивления резания металла в металлообрабатывающих станках. К силам вредного сопротивления обычно относятся силы трения, сопротивления среды и т. п. В одной и той же машине силы нельзя отнести раз и навсегда к одной какой-либо группе. Обычно в процессе работы в некоторые периоды времени силы движущие меняются местами с силами сопротивления. Например, в двигателе внутреннего сгорания сила давления на поршень в период сгорания рабочей смеси является движущей силой, а в период сжатия рабочей смеси — силой сопротивления.

Движение машины описывается уравнением работ. Разность работ за промежуток времени равна приращению кинетической энергии за это же время:

$$A_d - A_c = T_2 - T_1,$$

где A_d — работа движущих сил;

A_c — работа сил сопротивления;

T_1 и T_2 — соответственно кинетическая энергия машины в начале и конце рассматриваемого промежутка времени.

Работа сил на их перемещениях определяется по выражениям

$$A_d = \int_0^s P_d ds \quad \text{и} \quad A_c = \int_0^s P_c ds,$$

(ds — проекция перемещения точки приложения силы на ее направление).

Кинетическая энергия машины в общем случае определяется как сумма кинетических энергий в поступательном и вращательном движении ее звеньев:

$$T = \sum_1^n \left(\frac{m_l v_{st}^2}{2} + \frac{I_{sl} \omega_l^2}{2} \right),$$

где m_l — масса звена;

v_{st} — скорость центра тяжести звена;

I_{sl} — момент инерции массы звена относительно его центра тяжести;

ω_l — угловая скорость вращения звена.

В первый период скорость машины непрерывно возрастает, поэтому $A_d - A_c > 0$ за произвольный отрезок времени, во второй — равна первоначальной по истечении цикла, поэтому $A_d - A_c = 0$ за цикл движения машины, в третий — непрерывно падает, поэтому $A_d - A_c < 0$.

§ 38. Механический коэффициент полезного действия машины

Механическим коэффициентом полезного действия машины (к. п. д.) называется отношение работы сил полезного сопротивления к работе движущих сил за цикл движения машины.

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_d} \quad (124)$$

($A_{п.с}$ — работа сил полезного сопротивления).

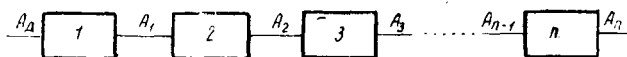


Рис. 151.

Но $A_c = A_{п.с} + A_{в.с}$, а так как за цикл $A_d = A_c$, то $A_{п.с} = A_d - A_{в.с}$. Подставляя это значение в выражение (124), получим

$$\eta = \frac{A_d - A_{в.с}}{A_d} = 1 - \frac{A_{в.с}}{A_d} = 1 - \psi, \quad (125)$$

где $\psi = \frac{A_{в.с}}{A_d}$ — коэффициент потерь в машине;

$A_{в.с}$ — работа сил вредного сопротивления.

Установим возможные пределы к. п. д. машины. Даже в самой совершенной машине тратится работа на преодоление сил вредного сопротивления, поэтому $\psi > 0$. Тогда в соответствии с выражением (125) $\eta < 1$. Вместе с тем, когда $A_d = A_{в.с}$, т. е. вся работа движущих сил тратится на преодоление сил сопротивления — машина работает вхолостую, $\eta = 0$. Таким образом, в машине $0 \leq \eta < 1$.

Для группы последовательно соединенных машин (рис. 151) к. п. д. определяется следующим образом. Полагаем известными $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ — к. п. д. отдельных машин (узлов), образующих агрегат. К. п. д. агрегата и отдельных машины

$$\eta = \frac{A_n}{A_d}, \quad \eta_1 = \frac{A_1}{A_d}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}, \quad \dots, \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

где A_d — работа движущих сил;

A_1 — работа сил полезного сопротивления машина 1 и движущих сил машины 2;

A_2 — работа сил полезного сопротивления машины 2 и движущих сил машины 3;

A_n — работа сил полезного сопротивления всего агрегата.

Произведение к. п. д. отдельных машин

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n = \frac{A_1}{A_d} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_d} = \eta. \quad (126)$$

Следовательно, к. п. д. группы последовательно соединенных машин равен произведению к. п. д. отдельных машин, составляющих агрегат.

§ 39. К. п. д. винтовой кинематической пары

Винтовую пару, как и ранее, представим в виде ползуна на наклонной плоскости с приложенными к нему силами (рис. 152). Дадим ползуну перемещение вверх по наклонной плоскости. Работа силы P будет работой движущих сил, а работа силы Q — работой сил полезного сопротивления,

тогда $\eta = \frac{A_Q}{A_P} = \frac{Qh}{Ps}$, но $\frac{h}{s} = \operatorname{tg} \alpha$, а $P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$, поэтому

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad (127)$$

(η — при относительном осевом перемещении винта и гайки в обратную сторону действия осевой силы Q).

Если же ползун будет перемещаться в сторону действия осевой силы, т. е. вниз по наклонной плоскости, то Q будет движущей, а P — силой полезного сопротивления. Кроме того, сила трения будет уже направлена в противоположную сторону относительно показанной на рис. 152, поэтому

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (128)$$

Отсюда при $\alpha < \varphi$ $\eta < 0$, т. е. движения под действием осевой силы Q не будет. Это явление называется самоторможением, а винтовая пара при $\alpha < \varphi$ — самотормозящейся. Самотормозящиеся винтовые пары широко используются в машинах для резьбы крепежных изделий, в винтовых домкратах и т. п. При определении к. п. д. в винтовых парах с прямоугольной нарезкой следует принимать значение приведенного угла трения.

§ 40. К. п. д. планетарных и дифференциальных механизмов

К. п. д. планетарного механизма определяем при условии, что в обратном движении он равен к. п. д. обычного зубчатого механизма с неподвижными осями зубчатых колес.

Дано: η_1 — к. п. д. обычного зубчатого механизма, равный к. п. д. планетарной передачи в обратном движении (водило неподвижно), и числа зубцов зубчатых колес. Требуется определить к. п. д. планетарного механизма η .

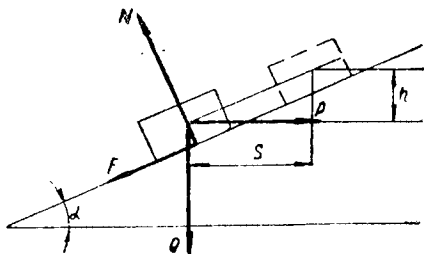


Рис. 152.

Обозначим M_1 , M_3 и M_B соответственно моменты на звеньях I , 3 и B (рис. 153). Угловые скорости и передаточные отношения

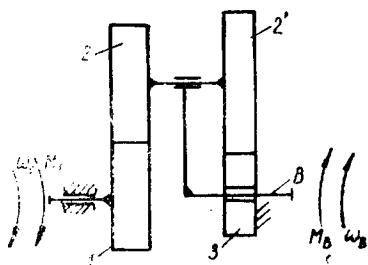


Рис. 153.

для механизма в обратном движении будем обозначать со штрихами ω'_1 , ω'_3 и т. п. Момент движущий, т. е. момент, приложенный к ведущему звену, считаем положительным, а момент, приложенный к ведомому звену, — отрицательным. Полагаем, что движение звеньев механизма происходит с постоянной скоростью.

Из условия равновесия внешних сил, приложенных к звеньям механизма,

$$M_1 + M_B + M_3 = 0. \quad (129)$$

Передачу мощности рассмотрим в планетарном механизме при обратном движении.

Планетарный механизм

Ведущее звено 1. Из условия баланса мощности $M_1\omega_1\eta + M_B\omega_B = 0$. Разделив это уравнение на ω_B , получим

$$M_1 i_{1-B} - M_B = 0, \quad (130)$$

где

$$i_{1-B} = \frac{\omega_1}{\omega_B}.$$

Ведущее звено B. Для этого случая

$$M_1\omega_1 + M_B\omega_B\eta = 0,$$

откуда

$$M_1 i_{1-B} \eta^{-1} + M_B = 0. \quad (131)$$

Уравнения (130) и (131) можно объединить в одно

$$M_1 i_{1-B} \eta^k + M_B = 0, \quad (132)$$

где $k=1$ при ведущем звене I и $k=-1$ при ведущем звене B .

Механизм в обратном движении

Ведущее звено I. Сумма мощностей

$$M_1\omega_1\eta_1 + M_3\omega'_3 = 0,$$

откуда

$$M_1 i'_{1-3} \eta_1 + M_3 = 0. \quad (133)$$

Здесь

$$i'_{1-3} = \frac{\omega'_1}{\omega'_3}$$

Ведущее звено 3. В этом случае

$$M_1\omega'_1 + M_3\omega'_3\eta_1 = 0,$$

откуда

$$M_1 i'_{1-3} \eta_1^{-1} + M_3 = 0. \quad (134)$$

Уравнения (133) и (134) объединим в одно

$$M_1 i'_{1-3} \eta_1^{k_1} + M_3 = 0, \quad (135)$$

где $k_1=1$ при ведущем звене 1 и $k_1=-1$ при ведущем звене 3.

Из уравнений (132) и (135) имеем

$$i_{1-B} \eta^k + \frac{M_B}{M_1} = 0$$

и

$$i'_{1-3} \eta_1^{k_1} + \frac{M_3}{M_1} = 0.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$i_{1-B} \eta^k + i'_{1-3} \eta_1^{k_1} + \frac{M_B}{M_1} + \frac{M_3}{M_1} = 0,$$

но из уравнения (129) имеем

$$\frac{M_B}{M_1} + \frac{M_3}{M_1} = -1,$$

тогда

$$i_{1-B} \eta^k + i'_{1-3} \eta_1^{k_1} = 1. \quad (136)$$

Для планетарного механизма

$$i'_{1-3} = \frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_3 - \omega_B} = 1 - i_{1-B},$$

так как $\omega_3=0$. Подставляя это значение i'_{1-3} в выражение (136), после несложных преобразований будем иметь:

$$\eta^k = \frac{1 - (1 - i_{1B}) \eta_1^{k_1}}{i_{1-B}}. \quad (137)$$

Полученное выражение позволяет определить значение к. п. д. планетарной передачи в зависимости от передаточного отношения i_{1-B} .

Установим, какими следует принимать значения k и k_1 в зависимости от величины i_{1-B} . Возможно несколько случаев.

1. Ведущее звено 1, поэтому $k=1$ и $M_1 > 0$.

а) В обращенном движении ведущее звено I , следовательно, $k_1=1$. Поток мощности идет от ведущего звена I , поэтому $M_1\omega'_1 > 0$, а так как $M_1 > 0$, то $\omega'_1 > 0$ или $\frac{\omega'_1}{\omega_1} > 0$.

Но $\omega'_1 = \omega_1 - \omega_B$ — угловая скорость звена I в обращенном движении. Следовательно,

$$\frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_1} = 1 - \frac{\omega_B}{\omega_1} = 1 - \frac{1}{i_{1-B}} > 0.$$

Это возможно при $i_{1-B} < 0$ и $i_{1-B} > 1$. Таким образом, при этих значениях i_{1-B} $k=1$ и $k_1=1$. Подставляя их в выражение (137), имеем

$$\eta = \frac{1 - (1 - i_{1-B}) \eta_1}{i_{1-B}}. \quad (138)$$

б) В обращенном движении ведущее звено $З$, следовательно, $k_1=-1$ и $M_1\omega'_1 < 0$, а так как $M_1 > 0$, то $\omega'_1 < 0$ и $\frac{\omega'_1}{\omega_1} < 0$ или $\frac{\omega_1 - \omega_B}{\omega_1} = 1 - \frac{1}{i_{1-B}} < 0$. Это будет при $0 < i_{1-B} < 1$. При этих значениях i_{1-B} , $k=1$ и $k_1=-1$

$$\eta = \frac{1 - (1 - i_{1-B}) \frac{1}{\eta_1}}{i_{1-B}}. \quad (139)$$

2. Ведущее звено B , поэтому $k=-1$ и $M_1 < 0$.

а) В обращенном движении ведущее звено I , следовательно, $k_1=1$ и $M_1\omega'_1 > 0$, т. е. поток мощности в обращенном движении идет от ведущего звена I . Но $M_1 < 0$, поэтому $\omega'_1 < 0$, а это определяет, как уже было показано, значение i_{1-B} в пределах $0 < i_{1-B} < 1$. При этих значениях i_{1-B} $k=-1$ и $k_1=1$. Тогда из выражения (137)

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1 - (1 - i_{1-B}) \eta_1}{i_{1-B}}. \quad (140)$$

б) В обращенном движении ведущее звено $З$, следовательно, $k_1=-1$ и $M_1\omega'_1 < 0$. Но $M_1 < 0$, поэтому $\omega'_1 > 0$, что определяет $i_{1-B} < 0$ и $i_{1-B} > 1$.

При этих значениях i_{1-B} $k=-1$ и $k_1=-1$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1 - (1 - i_{1-B}) \frac{1}{\eta_1}}{i_{1-B}}. \quad (141)$$

Полученные выражения для к. п. д. планетарной передачи сведены в табл. 3.

Таблица 3

К. п. д. планетарных передач

Значения i	Ведущее звено I — зубчатое колесо	Ведущее звено B — водило
$i_{1-B} < 0$ $i_{1-B} > 1$	$\eta = \frac{1 - (1 - i_{1-B}) \eta_1}{i_{1-B}}$	$\eta = \frac{i_{1-B}}{1 - (1 - i_{1-B})^2 \frac{1}{\eta_1}}$
$0 < i_{1-B} < 1$	$\eta = \frac{1 - (1 - i_{1-B}) \frac{1}{\eta_1}}{i_{1-B}}$	$\eta = \frac{i_{1-B}}{1 - (1 - i_{1-B}) \eta_1}$

§ 41. Приведенная масса и приведенная сила

При решении задач динамики, связанных с определением закона движения машины под действием заданных сил, удобно пользо-

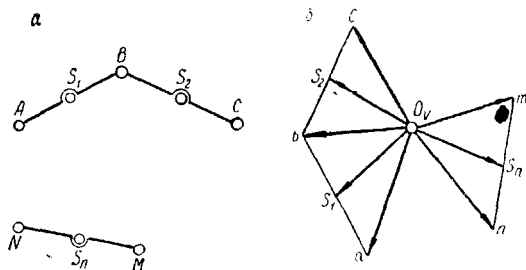


Рис. 154.

ваться понятием приведенной массы и приведенной силы. Введение этих понятий позволяет решать задачи динамики независимо от того, что представляет собой рассматриваемая машина, т. е. решение будет применимо для любой машины.

Пусть имеется какая-либо кинематическая цепь, состоящая из n звеньев (рис. 154, а). Центры тяжести звеньев обозначим буквой S . Даны скорости всех точек звеньев, а следовательно, известны и угловые скорости звеньев. План скоростей для данной кинематической цепи построен (рис. 154, б).

Кинетическая энергия такой кинематической цепи представляет собой сумму кинетических энергий всех звеньев, которые в общем

случае имеют как поступательное, так и вращательное движения. Следовательно,

$$T = \sum_1^n \left(\frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{I_i \omega_i^2}{2} \right), \quad (142)$$

где m_i — масса звена;

I_i — момент инерции массы;

v_{Si} — скорость центра тяжести звена;

ω_i — угловая скорость звена.

Примем какую-либо точку кинематической цепи за точку приведения. Пусть это будет точка A . Выражение (142) помножим и разделим на v_A^2 — квадрат скорости точки A . В результате получим

$$T = \frac{v_A^2}{2} \sum_1^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{v_A} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{v_A} \right)^2 \right].$$

Обозначим через

$$m_n = \sum_1^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{v_A} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{v_A} \right)^2 \right]$$

и назовем эту величину приведенной массой кинематической цепи, тогда

$$T = \frac{m_n v_A^2}{2}. \quad (143)$$

Таким образом, *приведенная масса кинематической цепи m_n — это такая масса, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии всей кинематической цепи, т. е. сумме кинетических энергий приводимых масс.*

Найдем несколько иное выражение для приведенной массы. Из плана скоростей (см. рис. 154) имеем: $v_A = (O_v a) k_v$, $v_{Si} = (O_v s_i) k_v$,

$$\omega_1 = \frac{(ab) k_v}{AB}, \quad \omega_2 = \frac{(bc) k_v}{BC}, \quad \dots, \quad \omega_n = \frac{(mn) k_v}{MN}.$$

Подставляя значения скоростей в выражение для m_n и сокращая на k_v , получим:

$$m_n = \left[m_1 \left(\frac{O_v s_1}{O_v a} \right)^2 + \frac{I_1}{AB^2} \left(\frac{ab}{O_v a} \right)^2 \right] + \left[m_2 \left(\frac{O_v s_2}{O_v a} \right)^2 + \frac{I_2}{BC^2} \left(\frac{bc}{O_v a} \right)^2 \right] + \dots + \left[m_n \left(\frac{O_v s_n}{O_v a} \right)^2 + \frac{I_n}{MN^2} \left(\frac{mn}{O_v a} \right)^2 \right]. \quad (144)$$

Из этого выражения видно, что приведенная масса кинематической цепи или механизма не зависит от масштаба плана скоростей,

а следовательно, и от скорости движения машины. Для данной кинематической цепи или механизма она определяется отношением скоростей, т. е. зависит от положения звеньев кинематической цепи, занимаемого ими при движении. Иногда удобно пользоваться понятием приведенного момента инерции кинематической цепи. Физический смысл приведенного момента инерции I_{Π} такой же, как и приведенной массы кинематической цепи. Пусть точка приведения A располагается на звене приведения OA , вращающемся вокруг точки O . Тогда, пользуясь обычным соотношением между массой и моментом инерции массы, получим

$$I_{\Pi} = m_{\Pi} (OA)^2. \quad (145)$$

Приведенной силой называется такая сила, работа которой на ее элементарном перемещении равна сумме работ приводимых сил. Пусть к точкам механизма, скорости которых известны, приложены силы P_1, P_2, \dots, P_n и P_n .

Используя выражение для работы силы на ее элементарном перемещении (стр. 119), будем иметь

$$M_{O_v} (P_{\Pi}) k_v dt = \sum_1^n M_{O_v} (P_i) k_v dt,$$

где P_{Π} — приведенная сила;
 k_v — масштаб плана скоростей;
 $M_{O_v} (P_{\Pi})$ и $M_{O_v} (P_i)$ — соответственно моменты относительно полюса плана скоростей O_v сил P_{Π} и P_i , перенесенных с механизма в одноименные точки плана скоростей и повернутых на угол 90° .

Обозначим через h_{Π} и h_i соответственно плечо приведенной силы и плечо силы P_i относительно точки O_v , тогда

$$P_{\Pi} h_{\Pi} k_v dt = \sum_1^n P_i h_i k_v dt.$$

Сокращая на общий множитель $k_v dt$, находим

$$P_{\Pi} = \frac{\sum_1^n P_i h_i}{h_{\Pi}}. \quad (146)$$

Отсюда видно, что приведенная сила, как и приведенная масса, не зависит от масштаба плана скоростей и, следовательно, может быть найдена при неизвестной скорости движения машины.

В плане скоростей каждый отрезок, в том числе и отрезки h_{Π} и h_i , представляют собой скорость. Поэтому произведение $P_i h_i$ представляет собой мощность. Таким образом, *мощность приведенной силы равна сумме мощностей приводимых сил.*

Используя понятия приведенной массы и приведенной силы, массы всех звеньев механизма и силы, действующие на звенья, можно представить в виде одной приведенной массы и одной приведенной силы. Следовательно, какой угодно механизм можно представить в виде механизма 1-го класса (стойки и ведущего звена, входящих во вращательную пару 5-го класса), к подвижному звену которого в точке приведения A приложена приведенная масса m_n и приведенная сила P_n , представляющая собой сумму приведенной силы сопротивления $P_{n.c}$ и приведенной движущей силы $P_{n.d}$ (рис. 155). Это позволяет решать за-

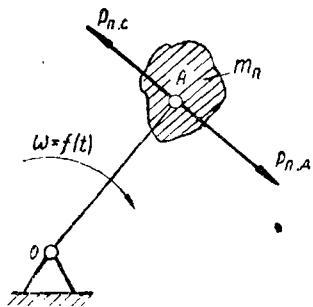


Рис. 155.

дачи динамики для любого механизма в наиболее общем виде.

§ 42. Истинная скорость движения машины, время и ускорение

Ранее при определении скоростей точек звеньев механизма принимали угловую скорость движения ведущего звена постоянной. В реальных машинах угловая скорость ведущего звена переменная. Причину этого можно установить, рассмотрев уравнение работ для машины за промежуток времени $t_2 - t_1$

$$A_d - A_c = \frac{m_{n_2} v_2^2}{2} - \frac{m_{n_1} v_1^2}{2}.$$

Из этого уравнения видно, что скорость движения машины v может меняться вследствие изменения соотношения между работой сил сопротивления A_c и работой движущих сил A_d , а также вследствие изменения приведенной массы m_n . Переменное значение $A_d - A_c$ определяется характером нагрузки (например, у двигателя внутреннего сгорания непрерывно меняется сила давления газов на поршень при его перемещении, у поршневого компрессора происходит аналогичное явление и т. д.) или различными условиями приведения сил движущих и сопротивления. Часты случаи, когда постоянная сила с приведением ее к ведущему звену становится переменной, так как соотношения между скоростями точки приложения силы и точки приведения зависят от взаимного расположения звеньев, которое непрерывно меняется в процессе движения машины.

Силы P_c и P_d приложены к разным точкам, поэтому в каждый момент времени соотношение между скоростями этих точек будет

различным. Этим объясняется изменение разности $A_d - A_c$, а следовательно, и скорости движения машины.

Изменение приведенной массы при движении механизма определяется изменением соотношений между скоростями движения масс его звеньев. Рассмотрим это на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 156). Если предположить, что ведущее звено непрерывно вращается с угловой скоростью $\omega = f(t)$, то звено 3 (ползун) в крайних положениях имеет скорость, равную нулю, а в промежуточном положении — максимальную.

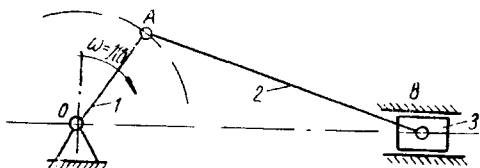


Рис. 156.

Следовательно, при перемещении из крайнего положения скорость звена 3 возрастает. Возрастает и кинетическая энергия этого звена. Оно получает кинетическую энергию от других звеньев, в том числе и от ведущего, скорость которого уменьшается. В промежуток же времени, когда звено 3,

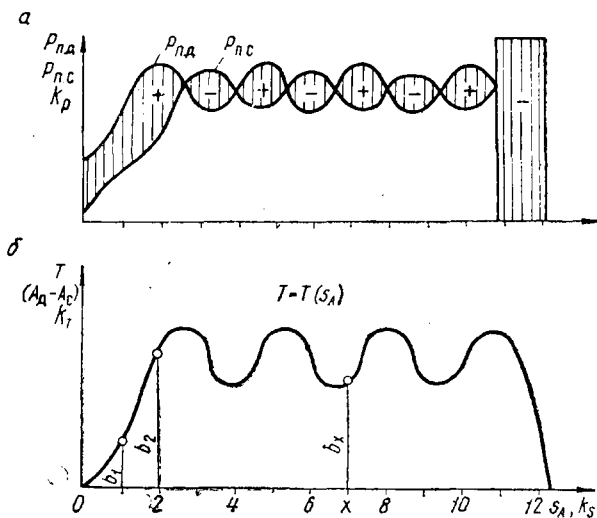


Рис. 157.

перемещаясь из среднего положения к крайнему, теряет свою скорость, его кинетическая энергия воспринимается другими звеньями, в том числе и ведущим, а это приводит к увеличению его скорости. Таким образом, происходит непрерывное перераспределение кинетической энергии в машине, а вместе с тем и непрерывное изменение скорости движения ведущего звена, определяющей скорость машины.

Для определения скорости движения ведущего звена машины по вычисленным значениям, приведенным к точке A (см. рис. 155),

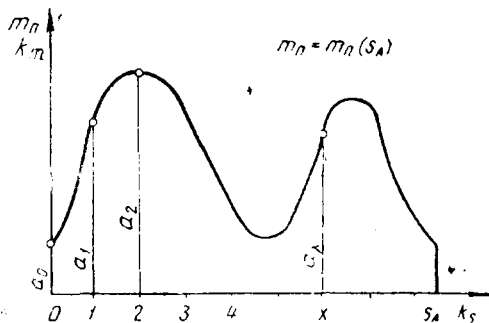


Рис. 158.

сил движущих и сопротивления построим диаграмму сил в зависимости от перемещения точки приведения S_A (рис. 157, а). Масштабы построения $k_p \left[\frac{\kappa \Gamma}{\text{м.м.}} \right]$ и $k_s \left[\frac{\text{м}}{\text{м.м.}} \right]$.

Проинтегрировав этот график сил, получим диаграмму работ сил или диаграмму кинетической энергии машины (рис. 157, б) в масштабе $k_T \left[\frac{\kappa \Gamma \text{м}}{\text{м.м.}} \right]$. Вы-

числив значения приведенной в точке A массы для каждого положения механизма, можно построить диаграмму приведенных масс $m_n = f(S_A)$ (рис. 158).

Для произвольного положения x механизма кинетическая энергия машины

$$T_x = \frac{m_{nx} v_x^2}{2}, \text{ откуда}$$

$$v_x^2 = 2 \frac{T_x}{m_{nx}} \text{ и}$$

$$v_x = \sqrt{2 \frac{T_x}{m_{nx}}}. \quad (147)$$

По этому выражению можно подсчитать значения скорости машины для всех положений ведущего звена и построить график скорости (рис. 159, а).

Скорость движения машины не будет постоянной, поэтому равные отрезки пути будут соответствовать разным промежуткам времени. Установим зависимость времени движения машины от ее перемещения (перемещения точки приведения).

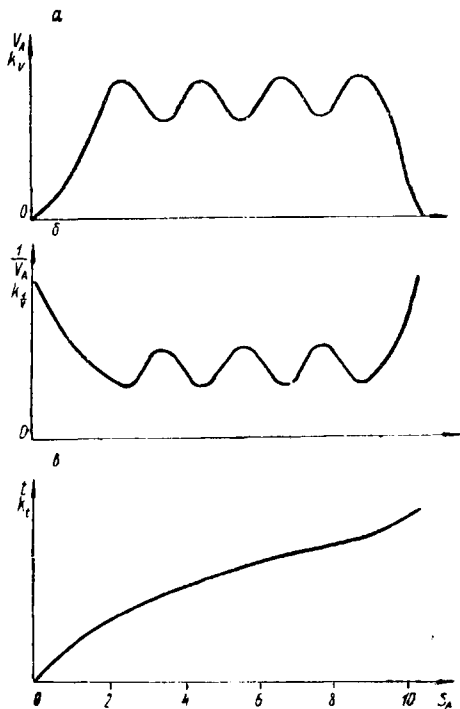


Рис. 159.

Известно, что $dt = \frac{1}{v} ds$, тогда

$$t_2 - t_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} ds.$$

Следовательно, для определения диаграммы времени строим график $\frac{1}{v_A} = f(s_A)$ (рис. 159, б) и интегрируем его. В результате получаем графическую зависимость времени движения машины (рис. 159, в) от перемещения.

Ускорение точки приведения ведущего звена машины

$$w_A = \sqrt{(w_A^n)^2 + (w_A^t)^2},$$

где $w_A^n = \frac{v_A^2}{OA}$ — центростремительное ускорение точки A , которое может быть определено для каждого положения механизма по графику скорости (рис. 159, а);

OA — расстояние от оси вращения звена, на котором располагается точка приведения A (см. рис. 155).

Ускорение $w_A^t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} / \frac{dt}{ds}$, следовательно, для построения

графика ускорения $w_A^t = f(s_A)$ следует продифференцировать график $v_A = f(s_A)$, затем график $t = F(s_A)$

и взять частное соответствующих ординат вновь полученных графиков $\frac{dv}{ds}$ и $\frac{dt}{ds}$.

В результате получим диаграмму ускорения w_A^t (рис. 160). Угловое ускорение

звена приведения OA $\epsilon_{OA} = \frac{w_A^t}{OA}$,

поэтому диаграмма w_A^t вместе с тем является диаграммой углового ускорения ϵ_{OA} . Отличие будет только в масштабах, соотноше-

ние между которыми $k_\epsilon = \frac{k_w}{OA}$.

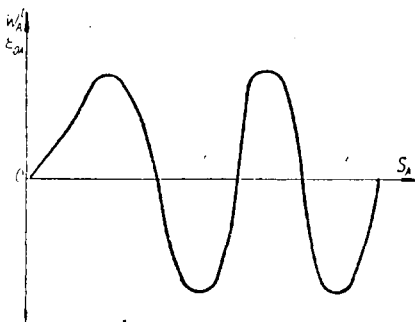


Рис. 160.

Иногда удобно истинную скорость движения машины определять иначе, чем это сделано выше. Пользуясь графиками $T = T(s_A)$ и $m_n = m_n(s_A)$ (см. рис. 157, б; 158), строим диаграмму $T = f(m_n)$, как это показано на рис. 161, по точкам 0, 1, 2... На участке установившегося движения эта диаграмма будет представлять собой замкнутую кривую, так как на этом участке периодически повторяются значения приведенной массы и кинетической энергии. Возь-

мом произвольную точку x на диаграмме и соединим ее прямой Ox с началом координат O . Угол между этой прямой и осью абсцисс обозначим через ψ_x . Скорость машины в положении x , как и ранее, будет

$$v_x^2 = 2 \frac{T_x}{m_{пх}} = 2 \frac{k_T(cx)}{k_m(Oc)},$$

но

$$\frac{cx}{Oc} = \operatorname{tg} \psi_x,$$

тогда

$$v_x^2 = 2 \frac{k_T}{k_m} \operatorname{tg} \psi_x, \quad (148)$$

т. е. на данной диаграмме квадрат скорости машины пропорционален $\operatorname{tg} \psi_x$.

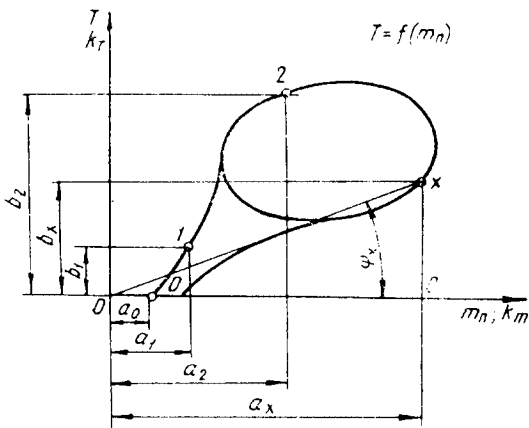


Рис. 161.

§ 43. Соотношения между кинетической энергией, приведенной массой и скоростью движения машины

Введем некоторые общие понятия, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Средняя скорость движения машины — постоянная по величине скорость, при движении с которой машина за цикл $t_{ц}$ проходит путь, равный пути цикла $s_{ц}$, т. е. $v_{cp} = \frac{s_{ц}}{t_{ц}}$, но $t_{ц} =$

$$= \int_0^{s_{ц}} \frac{1}{v} ds, \text{ следовательно,}$$

$$v_{cp} = \frac{s_{ц}}{\int_0^{s_{ц}} \frac{1}{v} ds}. \quad (149)$$

Обычно в реальной машине колебания ее скорости при установившемся движении сравнительно малы, поэтому вместо действительной средней скорости для практических расчетов можно принять среднеарифметическое значение скорости, т. е.

$$v_{cp} = \frac{v_{max} + v_{min}}{2}, \quad (150)$$

где v_{max} и v_{min} — соответственно максимальное и минимальное значения скорости движения машины за цикл.

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\text{cp}}} \quad (151)$$

С его помощью дается количественная оценка неравномерности движения машины.

Обычно для каждой группы машин устанавливается определенное значение δ , которое считается целесообразным для нормальных условий работы машины. Для строгальных и долбежных станков $\delta = \frac{1}{30} \div \frac{1}{40}$, поршневых компрессоров — $\frac{1}{70} \div \frac{1}{80}$, двигателей внутреннего сгорания — $\frac{1}{80} \div \frac{1}{100}$.

При большой величине δ будут большие колебания скорости машины, приводящие к дополнительным ускорениям движения звеньев, следовательно, и к дополнительным динамическим нагрузкам, что нежелательно. Кроме того, большие колебания скорости ведущего звена, привод которого осуществляется от электродвигателя, будут вызывать перегрузки двигателя или потребуют увеличения его мощности.

В период установившегося движения скорость машины меняется от v_{\max} до v_{\min} . Значения этих скоростей несложно определить из выражений (150) и (151)

$$v_{\max} = v_{\text{cp}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \text{ и } v_{\min} = v_{\text{cp}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (152)$$

Для диаграммы (рис. 161) $v_x^2 = 2 \frac{k_T}{k_m} \text{tg } \psi_x$, следовательно,

$$v_{\max}^2 = 2 \frac{k_T}{k_m} \text{tg } \psi_{\max} \text{ и } v_{\min}^2 = 2 \frac{k_T}{k_m} \text{tg } \psi_{\min}. \quad (153)$$

Из выражения (152)

$$v_{\max}^2 = v_{\text{cp}}^2 (1 + \delta) \text{ и } v_{\min}^2 = v_{\text{cp}}^2 (1 - \delta), \quad (154)$$

так как $\frac{\delta^2}{4} \approx 0$ вследствие малого значения δ . Из выражений (153) и (154) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \psi_{\max} &= \frac{1}{2} \frac{k_m}{k_T} v_{\text{cp}}^2 (1 + \delta); \\ \text{tg } \psi_{\min} &= \frac{1}{2} \frac{k_m}{k_T} v_{\text{cp}}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Все эти выражения позволяют для данной средней скорости и коэффициента неравномерности хода машины определить максимальное и минимальное значения скорости в установившемся период движения и, кроме того, на диаграмме $T = f(m_n)$ найти углы ψ_{\max} и ψ_{\min} .

§ 44. Регулирование скорости машины

Действительная скорость движения машины, как уже было показано, переменная: она может меняться от максимума до минимума при постоянной или переменной средней скорости. В случае, когда средняя скорость постоянна, действительная по истечении цикла будет иметь первоначальное значение, а так как приведенная масса тоже будет иметь первоначальное значение, то за цикл $A_d - A_c = 0$. Следовательно, запас кинетической энергии машины за цикл остался неизменным. Это есть периодическое движение.

В случае же, когда средняя скорость машины меняется, действительная скорость по истечении какого-либо промежутка времени уже не имеет первоначального значения, т. е. $A_d - A_c \neq 0$. Следовательно, запас кинетической энергии машины отличается от первоначального. Это есть непериодическое движение. Чтобы достичь первоначального значения средней скорости при таком движении; необходимо изменить в машине запас кинетической энергии. Задачи, связанные с уменьшением колебаний скорости, являются задачами регулирования. Рассмотрим, как решаются эти задачи.

Регулирование периодических колебаний скорости

При данной средней скорости машины колебания действительной скорости определяются разностью $v_{\max} - v_{\min}$, поэтому величина $\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\text{ср}}}$ характеризует изменение действительной скорости.

Процесс регулирования заключается в достижении определенного значения коэффициента неравномерности хода машины, который осуществляется путем соответствующего выбора значения приведенной массы машины. Для решения этой задачи установим влияние параметров машины на скорость ее движения.

Пусть известны коэффициент неравномерности хода δ и средняя скорость машины, для которой построена диаграмма $T = f(m_n)$ в период установившегося движения (рис. 162). Ранее было показано, что на участке установившегося движения такая зависимость будет выражаться замкнутой кривой. Начало координат — точка O . Для данной диаграммы несложно построить углы ψ_{\max} и ψ_{\min} . Проведем из начала координат две касательные прямые к диаграмме, которые наклонены к оси абсцисс под углами ψ_{\max} и ψ_{\min} .

Предположим, что коэффициент неравномерности хода машины изменился и стал равным δ_1 , причем $\delta_1 < \delta$. Установим, что произойдет на диаграмме $T = f(m_n)$. Из (155) видно, что новое значение коэффициента неравномерности δ_1 определит углы $\psi_{1\max}$ и $\psi_{1\min}$, причем $\psi_{1\max} < \psi_{\max}$, а $\psi_{1\min} > \psi_{\min}$. Если под углами $\psi_{1\max}$ и $\psi_{1\min}$ провести две прямые, касательные к диаграмме, то они пере-

секутся в точке O_1 , которая будет новым началом координат в системе T, m_n .

Таким образом, уменьшение коэффициента неравномерности хода машины при всех прочих равных условиях приводит к новому началу координат диаграммы $T = f(m_n)$ при сохранении параллельности осей координат. Это означает, что начало координат переместилось влево на величину m_0 и вниз на величину T_0 . Отсюда можно сделать вывод: для того чтобы уменьшить коэффициент неравномерности хода машины, необходимо приведенную массу машины увеличить на постоянную величину m_0 , а кинетическую энергию — на величину T_0 .

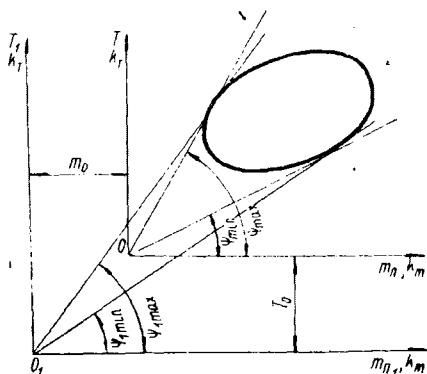


Рис. 162.

Следует обратить внимание на то, что дополнительная кинетическая энергия машины связана с увеличением приведенной массы на постоянную величину. Для звена $T = \frac{mv^2}{2}$. При данном значении кинетической энергии увеличение массы приведет к снижению скорости. Для того чтобы сохранить скорость на прежнем уровне, следует сохранить отношение $\frac{T}{m} = \frac{v^2}{2}$, т. е., увеличив массу, необходимо во столько же раз увеличить и кинетическую энергию.

Практически для достижения заданного значения δ увеличение приведенной массы на постоянную величину m_0 достигается путем установки на ось ведущего звена или на ось звена, связанного с ним постоянным передаточным отношением, колеса с массивным ободом — маховика. Назначение маховика — уменьшить коэффициент неравномерности хода машины до заданного значения.

Рассмотрим, как выбирается маховик для определенных условий работы машины. Требуется при заданных параметрах машины определить массу и геометрические размеры маховика, обеспечивающие движение с заданным коэффициентом неравномерности хода машины δ .

Строим диаграмму кинетической энергии в функции приведенной массы для периода установившегося движения, т. е. диаграмму $\Delta T = f(\Delta m_n)$ с началом координат в точке O (полная кинетическая энергия машины вместе с маховиком $T = \Delta T + T_0$, а полная приведенная масса $m_n = \Delta m_n + m_0$). Эта диаграмма (рис. 163) будет представлять собой замкнутую кривую. По выражениям (155) определяем углы ψ_{\max} и ψ_{\min} : и под этими углами на диаграмме $\Delta T = f(\Delta m_n)$ проводим две касательные прямые до пересечения в точке O_1 , кото-

Вес обода маховика (рис. 164) $G = ab\pi D\gamma$, тогда $GD^2 = ab\pi D\gamma D^2$, где γ — удельный вес материала маховика в $\text{кг}/\text{м}^3$. Полагая, что $a = k_1 D$ и $b = k_2 D$, получим $GD^2 = \pi k_1 k_2 \gamma D^5$, откуда

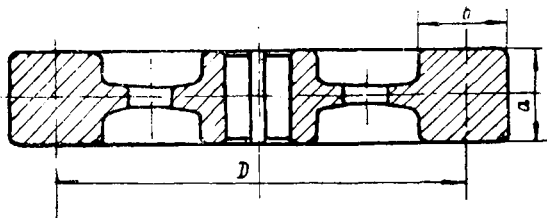


Рис. 164.

$$D = \sqrt[5]{\frac{GD^2}{k_1 k_2 \pi \gamma}} \text{ м.} \quad (158)$$

Обычно $k_1 = \frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$ и $k_2 = \frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$. Если маховик располагается на звене 2, связанном со звеном приведения 1 постоянным передаточным отношением $i_{2-1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, то момент инерции этого маховика

I_2 определяется из условия равенства кинетической энергии $\frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}$, откуда $I_2 = \frac{I_1}{i_{2-1}^2}$, а $I_1 = \frac{GD^2}{4g}$, где GD^2 определяется по выражению (157).

Из полученного выражения для I_2 видно, что момент инерции маховика в i_{2-1}^2 раз меньше момента инерции маховика, установленного на звене приведения. Следовательно, чем быстрее звено, на котором установлен маховик, тем меньше его момент инерции, вес и габариты. Однако из этого не следует, что маховик надо устанавливать всегда на быстреходном звене. Целесообразность установки маховика определяется характером и величиной пиковых нагрузок, воспринимаемых исполнительным звеном и передаваемым передаточным механизмом маховику.

На рис. 165 приведены две тахограммы, дающие наглядное представление об эффекте установки маховика для скорости движения машины (кривая 1 — скорость движения машины до установки маховика; кривая 2 — с маховиком). Колебания скорости значительно уменьшаются и определяются заданной величиной δ .

Примерный расчет маховика. Дана кинематическая схема поршневого компрессора со всеми размерами звеньев, индикаторная диаграмма (рис. 166), средняя угловая скорость ведущего звена и коэффициент неравномерности хода машины. Момент движущих сил на валу кривошипа постоянный.

Траекторию движения A (точки приведения) ведущего звена за цикл разбиваем на ряд равных отрезков и строим механизм во всех этих положениях. В рассматриваемом примере все вычисления приводятся

для одного положения механизма, так как для всех остальных положений вычисления идентичны.

Сила, действующая на поршень компрессора, $P_B = (ef) k_p F_n$ (F_n — площадь поршня). Пользуясь построенным планом скоростей (рис. 166), определяем приведенную к точке A касательную силу P^t как результат действия силы P_B . Используем теорему Н. Е. Жуковского о жестком рычаге.

Силы P_B и P^t поворачиваем на угол 90° и переносим соответственно в точки b и a плана скоростей. Тогда $(O_v b) P_B = (O_v a) P^t$, откуда $P^t = P_B \frac{O_v b}{O_v a}$.

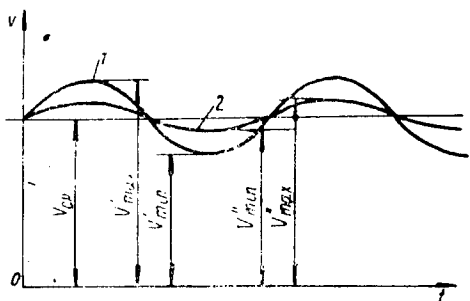


Рис. 165.

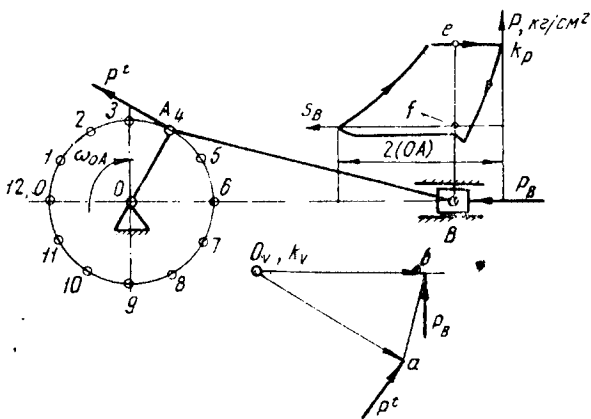


Рис. 166.

Определив таким образом в каждом положении механизма приведенную касательную силу, строим диаграмму приведенных касательных сил (рис. 167, а) за цикл движения машины. Отрицательные значения сил откладываем вниз, положительные — вверх. Затем интегрируем диаграмму приведенных касательных сил и получаем диаграмму работ сил сопротивления (кривая 1 на рис. 167, б).

По условиям задачи момент движущих сил на валу кривошипа (звено OA) постоянный. Следовательно, диаграмма работ движущих сил будет выражаться прямолинейной зависимостью, а так как за цикл $A_d - A_c = 0$, то в начале цикла (положение O) и в конце (положение 12) ординаты работ A_d и A_c будут равны между собой,

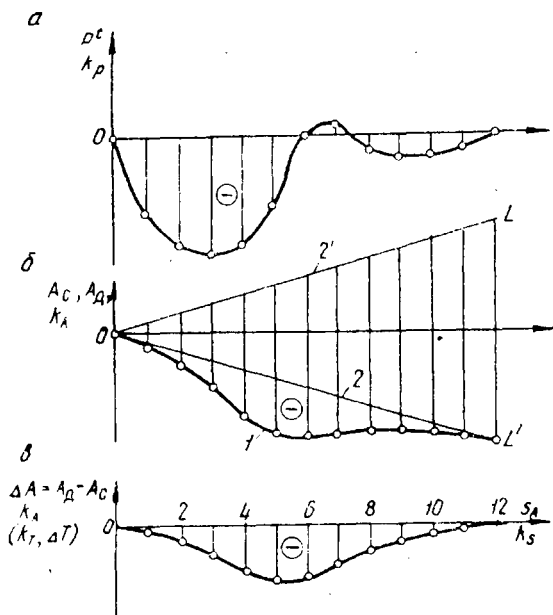


Рис. 167.

но противоположны по знаку. Поэтому диаграмма работ движущих сил будет представлена прямой $2'$ (см. рис. 167, $б$).

Для удобства получения разности $A_d - A_c$ строим диаграмму работ A_d в области отрицательных ординат в виде прямой 2 . Затем строим диаграмму разности работ $\Delta A = A_d - A_c$ (рис. 167, $в$) путем непосредственного замера разности ординат графиков 1 и 2 . Диаграмма разности работ представляет собой и диаграмму кинетической энергии ΔT .

Далее по выражению (145) определяем значение приведенной к точке A массы механизма и строим диаграмму приведенных масс (рис. 168). По диаграммам приращения кинетической энергии и приведенной массы строим диаграмму кинетической энергии в функции приведенной массы (рис. 169). Получаем замкнутую кривую. Следует обратить особое внимание на знаки ординат. Отрицательные значения величин откладываются вниз, положительные — вверх. По выраже-

ниям (155) определяем углы ψ_{\max} и ψ_{\min} , под этими углами проводим к диаграмме $\Delta T = f(\Delta m_n)$ две касательные прямые до пересечения с осью ординат в точках A и B . Замерив отрезок AB , по выражению (157) определяем маховый момент маховика, а затем, задавшись значениями k_1 и k_2 , по выражению (158) — его диаметр и сечение.

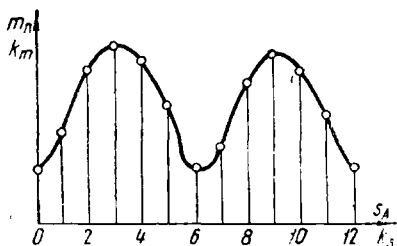


Рис. 168.

Регулирование неперриодических колебаний скорости

Неперриодические колебания скорости связаны с изменением запаса кинетической энергии машины, что определяет изменение средней скорости движения машины. Задачей регулирования при таком движении является поддержание средней скорости движения машины на заданном уровне.

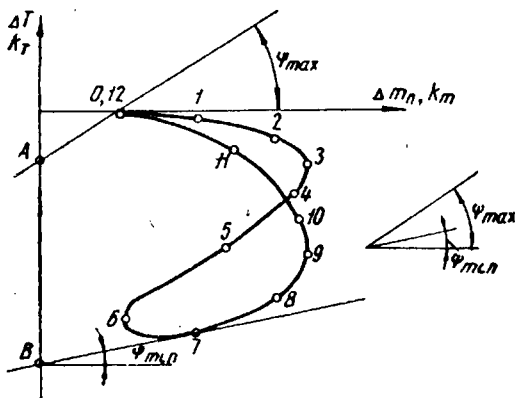


Рис. 169.

Обычно это осуществляется автоматически без участия человека. Устройства, поддерживающие скорость движения машины на заданном уровне, называются автоматическими регуляторами скорости. Они изменяют в машине соотношение между работой движущих сил и сил сопротивления, а следовательно, и кинетическую энергию.

Первый промышленный регулятор был построен известным механиком И. И. Ползуновым в 1765 г. и применен для автоматического поддержания уровня воды в котле паровой машины. Устройство этого регулятора показано на рис. 170.

Регулятор скорости движения паровой машины был изобретен в 1784 г. английским механиком Д. Уаттом. Устройство этого

центробежного регулятора показано на рис. 171. Движение от вала машины 1 через пару конических зубчатых колес передается регулятору, который будет вращаться с угловой скоростью ω_p . При увеличении угловой скорости под действием центробежных сил массивные шары 2 будут перемещаться в сторону от оси вращения и поднимать муфту 3. Движение муфты через рычажную систему будет передаваться клапану 5, который перекрывает доступ движущих сил P_d (в рассматриваемом случае пара) в машину. В результате скорость машины падает, центробежная сила масс 2 уменьшается. Под действием веса муфты 3, натяжения пружины 4 и весов

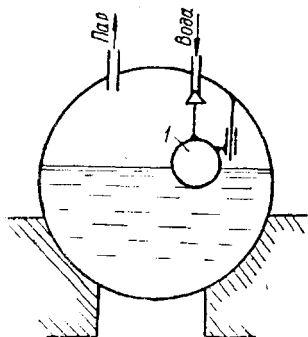


Рис. 170.

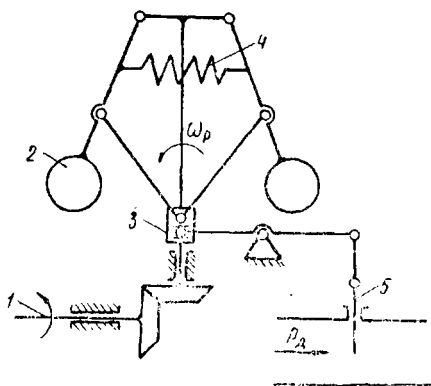


Рис. 171.

масс 2 они перемещаются в сторону оси регулятора, а муфта 3, опускаясь, поднимает клапан 5. Приток движущих сил (пара) в машину увеличивается и скорость возрастает. Процесс регулирования совершается непрерывно до тех пор, пока не наступит равновесие сил. Подъемная сила муфты через жесткую рычажную систему непосредственно передается клапану, регулируемому доступ движущих сил в машину. Поэтому такая схема носит название прямого регулирования. Недостатками ее являются: 1) большие габариты регулятора при необходимости получения большой подъемной силы для перемещения клапана; 2) отличие скорости машины после совершения процесса регулирования от первоначальной.

Большие габариты регулятора нежелательны: с увеличением габаритов ухудшаются его регулирующие свойства. Изменение скорости после совершения процесса регулирования объясняется тем, что после увеличения нагрузки на машину клапан 5 должен быть поднят, так как увеличивается приток движущих сил к машине. Это приводит к опусканию муфты 3 и сближению масс 2, а значит, к новой угловой скорости регулятора и машины, так как каждому

положению муфты соответствует вполне определенная угловая скорость.

Указанные недостатки схемы прямого регулирования частично или полностью устраняются схемами непрямого регулирования.

На рис. 172 показана схема непрямого регулирования с жестким выключателем. При увеличении скорости машины, а следовательно

и регулятора, массы *1* перемещаются от оси регулятора, а муфта *2* поднимается и увлекает за собой рычаг *3*, который будет поворачиваться вокруг точки *A*, так как подъемная сила регулятора мала. Шарнир *B* перемещается вверх и открывает нижний клапан *6* сервомотора *4*. Рабочая жидкость (обычно масло), находящаяся под давлением, устремляется в нижнюю полость цилиндра *8*. Поршень *9* идет вверх, а клапан *7* перемещается вниз, уменьшая доступ движущих сил к машине. В результате скорость машины уменьшается. Муфта *2* и рычаг *3* опускаются, поворачиваясь вокруг шарнира *A*. Шарнир *B* перемещается вниз и открыва-

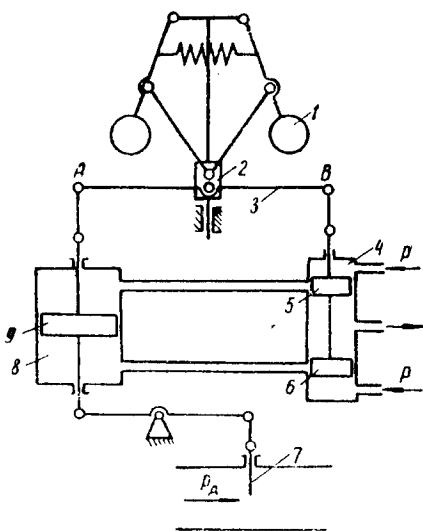


Рис. 172.

ается верхний клапан *5* сервомотора. Рабочая жидкость поступает в верхнюю полость цилиндра *8*. Затем поднимается клапан *7*, работа движущих сил возрастает и скорость движения машины увеличивается. Таким образом, процесс регулирования происходит до тех пор, пока не наступит состояние равновесия.

В этой схеме подъемная сила, необходимая для перемещения клапана *7*, уже не зависит от подъемной силы муфты *2* регулятора. Она определяется величиной давления рабочей жидкости и площадью поршня *9* цилиндра *8*. Следовательно, эта схема позволяет иметь необходимую подъемную силу без увеличения габаритов регулятора. При увеличении или уменьшении нагрузки на машину клапан *7* либо поднят, либо опущен, а так как он жестко связан с муфтой *2*, то муфта будет занимать различные положения в зависимости от различных угловых скоростей регулятора, а следовательно, и скоростей машины. Это значит, что данная схема регулирования также не обеспечивает первоначальной скорости машины после совершения процесса регулирования.

Другая схема непрямого регулирования (рис. 173) с нежестким выключателем или схема изодромного регулирования действует ана-

логично предыдущей. Отличие заключается в установке пружины 12 и катаракта 10. Это устройство носит название изодрома. В схеме нет жесткой связи между рычагом 3 и клапаном 7. Поэтому после совершения процесса регулирования точка *B* занимает первоначальное положение (клапаны 5 и 6 закрыты) и точка *A* также займет первоначальное положение, так как пружина 10 будет возвращать ее на место. Произойдет только относительное смещение поршня 11 катаракта вверх или вниз в зависимости от того, какое положение после совершения процесса регулирования займет клапан 7. Таким образом, данная схема регулирования, с одной стороны, позволяет получить необходимую подъемную силу для перемещения клапана 7, а с другой — первоначальную скорость после совершения процесса регулирования.

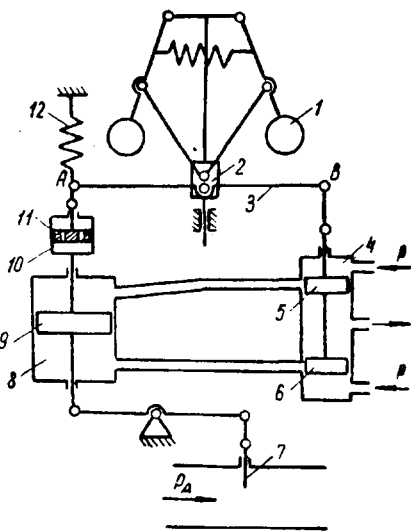


Рис. 173.

Кинетостатика центробежного регулятора. Для установления соотношений между параметрами регулятора и угловой скоростью

его вращения или скоростью движения машины рассмотрим его кинетостатику.

Регулятор вращается с угловой скоростью ω_p , при которой его звенья не перемещаются в плоскости, содержащей ось регулятора и его звенья. В этом случае все силы, действующие на регулятор, находятся в равновесии, а угловая скорость ω_p называется равновесной угловой скоростью. На рис. 174 показан регулятор с приложенными силами. При решении задачи полагаем, что вес звеньев регулятора и силы трения в парах малы и не учитываются.

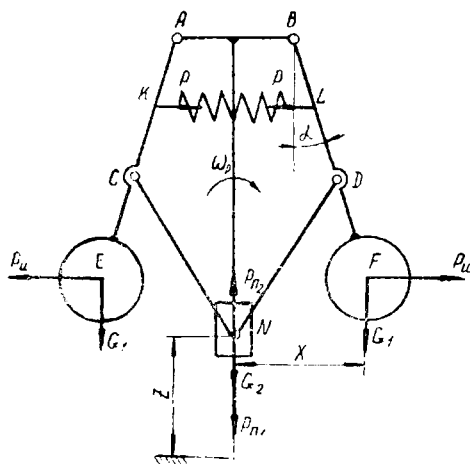


Рис. 174.

Обозначим через $P_{п_1}$, приведенную к муфте N силу от действия сил G_1 (веса масс E и F), G_2 (веса муфты N) и P (натяжения пружины), через $P_{п_2}$ — приведенную к муфте силу от действия сил $P_{п_1}$ (центрбежных сил масс E и F)

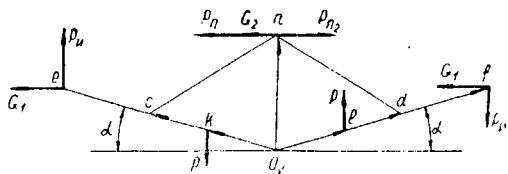


Рис. 175.

к муфте N , имеем $P_{п_1} + P_{п_2} = 0$. Значения приведенных сил найдем по методу Н. Е. Жуковского. Для этого построим план скоростей для регулятора в плоскости чертежа (рис. 175) и, повернув все силы на угол 90° , перенесем их с регулятора в одноименные точки плана скоростей. Приведенные силы определяются из условий

$$P_{п_1} v_N = G_2 v_N + 2G_1 v_F \sin \alpha + 2P v_L \cos \alpha$$

$$P_{п_2} v_N = -2 \frac{G_1}{g} \omega_p^2 x v_F \cos \alpha.$$

Из этих выражений находим $P_{п_1}$ и $P_{п_2}$. Суммируя их и приравнявая сумму нулю, после несложных преобразований находим равновесную скорость регулятора

$$\omega_p = \sqrt{\frac{G_2 + 2G_1 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_L}{v_N} \cos \alpha}{2 \frac{G_1}{g} x \frac{v_F}{v_N} \cos \alpha}}. \quad (159)$$

Полученное выражение для ω_p связывает угловую скорость вращения регулятора (скорость машины) с параметрами регулятора. Пользуясь этим выражением, можно выбрать основные параметры регулятора. Как видно, угловая скорость ω_p зависит от положения регулятора, определяемого координатой x . Удобнее пользоваться координатой z (см. рис. 174), фиксирующей положение муфты регулятора и связанного с ним клапана, который регулирует доступ движущих сил в машину. На рис. 176 приведена графическая зависимость положения муфты регулятора от равновесной угловой скорости.

В пределах возможного перемещения муфты регулятора скорость его меняется от ω_{\min} до ω_{\max} . Это изменение скорости регулятора принято характеризовать коэффициентом регулирования скорости $\epsilon = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}$, где $\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$. Величина ϵ задается при проектировании регулятора. Определяя соотношения между равновес-

ной угловой скоростью регулятора и его параметрами (159), силы трения в кинематических парах не учитывали. Однако они оказывают свое влияние на работу регулятора.

Предположим, что регулятор, вращаясь с угловой скоростью ω , находится в равновесии при положении муфты, определяемой координатой z (рис. 177, точка A равновесной кривой). При увеличении скорости регулятора центробежные силы P_n возрастают, но избыток

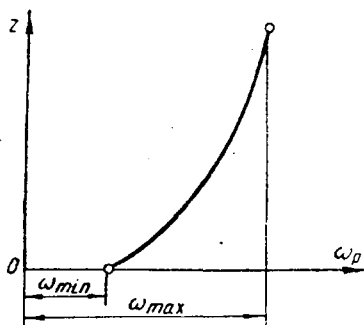


Рис. 176.

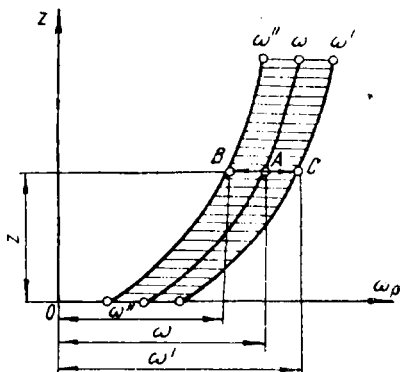


Рис. 177.

сил при этом не преодолевает сопротивления сил трения и муфта регулятора не перемещается. И только при увеличении скорости до ω' (точка C графика) регулятор начинает реагировать и муфта перемещается вверх. Аналогичное явление будет при уменьшении скорости регулятора до значения ω'' , при которой начинается перемещение муфты вниз (точка B графика), так как только при этом значении угловой скорости регулятора избыток веса шаров и муфты, а также натяжения пружины над центробежными силами P_n преодолевает сопротивление трения в кинематических парах регулятора.

Таким образом, в пределах отрезка BC регулятор не реагирует на изменения его угловой скорости, т. е. не чувствует изменения скорости. Если рассмотреть это явление для всех положений муфты регулятора, то будем иметь поле (на рис. 177 заштриховано), в пределах которого регулятор не чувствует изменения скорости. Это поле называется зоной нечувствительности регулятора. Свойство нечувствительности регулятора количественно оценивается коэффициентом нечувствительности

$$\eta = \frac{\omega' - \omega''}{\omega}, \quad (160)$$

где $\omega \approx \frac{\omega' + \omega''}{2}$ — равновесная угловая скорость для идеального регулятора без трения. Из этих выражений имеем $\omega' = \omega \left(1 + \frac{\eta}{2} \right)$ и

$\omega'' = \omega \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$. С учетом коэффициента нечувствительности коэффициент регулирования скорости

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{\omega'_{\max} - \omega''_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{\omega_{\max} \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) - \omega_{\min} \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)}{\omega_{\text{ср}}} = \\ &= \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min}) + \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \eta}{\omega_{\text{ср}}}, \end{aligned} \quad (161)$$

откуда

$$\varepsilon_v = \varepsilon + \gamma_1.$$

Следовательно, при учете нечувствительности регулятора увеличивается коэффициент регулирования скорости. Важным свойством регулятора является устойчивость. Под устойчивостью регулятора понимается его состояние при выходе из состояния равновесия вновь возвращаться в первоначальное или близкое к нему положение. Если регулятор выйдет из состояния равновесия и это состояние будет усугубляться, то такой регулятор не будет устойчивым. Это приведет к тому, что регулятор придет к крайнему нижнему или крайнему верхнему положению. И в том и другом случае он перестанет регулировать. Машина может остановиться или пойти вразнос.

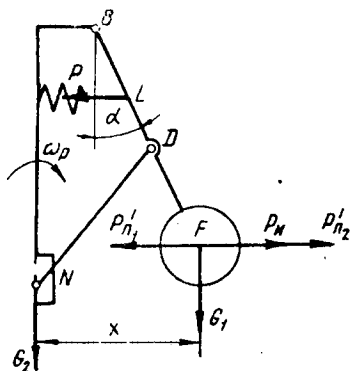


Рис. 178.

Свойство устойчивости можно установить по характеристике регулятора. Силы, действующие на регулятор, приведем к центру массы F (рис. 178). Здесь P'_{n_1} — приведенная сила как результат действия сил G_1 , G_2 и P , сила P'_{n_2} — приведенная сила как результат действия сил P_n . Силу P'_{n_1} несложно определить по методу Н. Е. Жуковского аналогично силе P_{n_1} , используя план скоростей (см. рис. 175).

$$P'_{n_1} = 2G_1 \operatorname{tg} \alpha + G_2 \frac{v_N}{v_F \cos \alpha} + 2P \frac{v}{v_F}. \quad (162)$$

Сила же $P'_{n_2} = -2 \frac{G_1}{g} \omega_p^2 x$, т. е. равна удвоенной величине центробежной силы.

На рис. 179 показана криволинейная графическая зависимость силы P'_{n_1} в функции x . Кривая носит название характеристики регулятора. Зависимость P'_{n_2} от x будет изображаться прямой

линией — линией центробежных сил. Точка A пересечения характеристики регулятора с линией центробежных сил определяет равновесие регулятора, так как в этой точке $P'_{п1} + P'_{п2} = 0$. Если регулятор вывести из состояния равновесия путем поднятия муфты N , то увеличится x и регулятор окажется в точке A_1 характеристики. Если же теперь регулятор предоставить самому себе, то он вернется в исходное положение. Это будет происходить в точке A_1 и во всех точках, расположенных за ней, так как при всех значениях $x > x_p$, $P'_{п1} > P'_{п2}$, и масса F будет перемещаться в сторону большей силы, т. е. к оси регулятора, а на характеристике — к точке A . Если регулятор вывести из состояния равновесия, опустив муфту N , то уменьшится x и регулятор окажется в точке A_2 характеристики. Предоставив регулятор самому себе, убеждаемся, что он возвращается в исходное положение, так как при всех значениях $x < x_p$, $P'_{п1} < P'_{п2}$ и масса F перемещается в сторону большей силы, т. е. от оси регулятора, а на характеристике — к точке A равновесия регулятора. Все это указывает на то, что регулятор будет устойчивым.

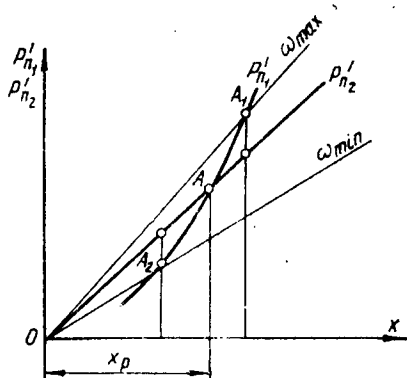


Рис. 179.

На рис. 180 показана характеристика неустойчивого регулятора, для которого при $x \cong x_p$, т. е. при выходе регулятора из состояния

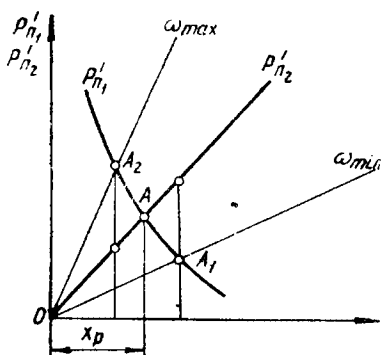


Рис. 180.

равновесия это состояние будет усугубляться, так как большее значение приведенной силы будет всегда направлено от положения равновесного состояния регулятора. В этом несложно убедиться, сопоставив значения сил $P'_{п1}$ и $P'_{п2}$ слева и справа от точки равновесия A (рис. 180). Обычно устойчивость регулятора рассматривается во всем диапазоне изменения его угловых скоростей от ω_{\min} до ω_{\max} , для которых линии центробежных сил будут различны.

При рассмотрении устойчивости нельзя учитывать один регулятор без объекта регулирования — машины, так как это может привести к неправильным выводам.

Ранее было установлено, что каждая машина имеет определенное значение коэффициента неравномерности δ . Обычно принимает-

ся $\delta < \eta$, чтобы регулятор не реагировал на изменение скорости в пределах δ . В противном случае неравномерность хода машины не уменьшается, а увеличивается.

§ 45. Уравновешивание вращающихся масс

При вращении звеньев, центр тяжести которых не совпадает с осью вращения, возникают силы инерции, передающиеся на опору.

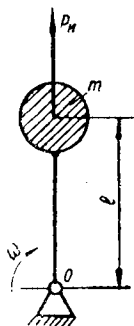


Рис. 181.

Эти силы при больших скоростях вращения звеньев могут достигать большой величины. Учет их при расчете опор приводит к большим их габаритам при необходимой работоспособности. Вместе с тем большие усилия, периодически воздействующие на опору с частотой, равной угловой скорости вращения звена, приводят к возникновению колебаний, создающих дополнительные нагрузки на опоры. В качестве примера рассмотрим действие центробежной силы инерции P_n (рис. 181) на опору от неуравновешенной массы m , расположенной на расстоянии l на звене, которое вращается с угловой скоростью ω . Сила инерции $P_n = -m\omega^2 l$. Если принять вес массы $G = 0,1$ кг, $l = 1$ м и число оборотов звена $n = 3000$ об/мин,

то $P_n = -\frac{0,1}{9,81} \left(\frac{\pi \cdot 3000}{30} \right)^2 \cdot 1 = -1000$ кг, т. е. неуравновешенная

масса весом всего 0,1 кг приводит к силе инерции, действующей на опору в 1000 кг. В современных машинах имеются звенья, число оборотов которых в минуту достигает несколько десятков тысяч и более. В этом случае малейшее несовпадение центра тяжести звена с осью вращения приводит к колоссальным силам инерции, воспринимаемым опорами.

Задачей уравновешивания вращающихся масс является устранение действия на опоры сил инерции от неуравновешенных масс. Различают две основные задачи. Одна задача связана с уравновешиванием масс конструируемых звеньев, т. е. на чертеже. Решение этой задачи осуществляется расчетным путем. Другая задача связана с уравновешиванием уже готовых звеньев. Обычно уравновешенное на чертеже звено после его изготовления оказывается неуравновешенным вследствие неоднородности материала звена и неточности изготовления. Эта задача решается практически путем балансировки звеньев.

Расчетное уравновешивание вращающихся масс

Уравновешивание одной массы. Имеем звено, в котором на расстоянии от оси вращения l_1 располагается неуравновешенная масса m_1 (рис. 182). В общем случае звено может вращаться с переменной скоростью, т. е. кроме угловой скорости ω будет иметь место

угловое ускорение ϵ . В результате будут две силы инерции — центробежная $P_{и_1} = -m_1\omega^2 l_1$ и касательная $P_1^t = -m_1\epsilon l_1$. Каждая из этих сил будет восприниматься опорой O . Уравновесим вначале силу $P_{и_1}$. Условие уравнивания

$$P_{и_1} + P_{и_1} = 0. \quad (163)$$

Здесь $P_{и_1} = -m\omega^2 l$ — сила, являющаяся результатом приложения массы m на расстоянии l по линии действия силы $P_{и_1}$. Подставив в уравнение (163) значение сил и сократив на общий множитель ω^2 , получим:

$$m_1 l_1 + m l = 0. \quad (164)$$

Это и будет условие уравнивания сил $P_{и_1}$. Следовательно, для того чтобы уравновесить центробежную силу, необходимо приложить дополнительную массу таким образом, чтобы сумма статических моментов дополнительной массы и неуравновешенной массы относительно оси вращения равнялась нулю. Для этого массу m

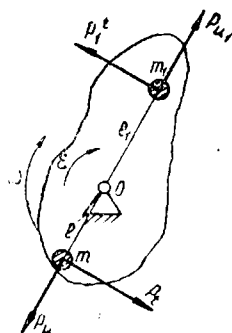


Рис. 182.

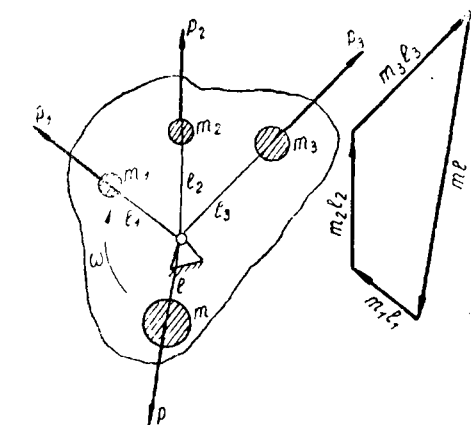


Рис. 183.

прикладываем к звену по линии действия силы $P_{и_1}$ с противоположной стороны оси вращения O (см. рис. 182). С приложением дополнительной массы m возникает не только сила $P_{и_1}$, но и сила $P_1^t = -m\epsilon l$. Условие (164) умножим на ϵ , тогда $m_1\epsilon l_1 + m\epsilon l = 0$ или $P_1^t + P^t = 0$. Это есть условие равновесия касательных сил. Следовательно, условие уравнивания центробежных сил (164) вместе с тем является и условием уравнивания касательных сил, т. е. полным условием уравнивания массы m_1 . Это указывает на то, что при уравнивании масс необходимо уравнивать центробежные силы инерции, касательные же силы инерции будут уравниваться автоматически. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только центробежные силы инерции.

Уравнивание нескольких масс, расположенных в одной плоскости. Рассмотрим звено (рис. 183, а), на котором располагаются три неуравновешенных массы m_1, m_2, m_3 соответственно на расстояниях l_1, l_2, l_3 от оси вращения O . Задача для многих масс

решается совершенно аналогично, поэтому в случае необходимости можно рассмотреть уравнивание и большего числа масс. При вращении звена с угловой скоростью ω будут возникать центробежные силы инерции

$$P_1 = -\omega^2 l_1 m_1; \quad P_2 = -\omega^2 l_2 m_2; \quad P_3 = -\omega^2 l_3 m_3.$$

Для устранения действия этих сил на опору O необходимо приложить дополнительную силу P при условии, что $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P} = 0$. Полагаем, что сила P является результатом приложения массы m к звену на расстояние l от оси вращения, тогда $P = -\omega^2 l m$.

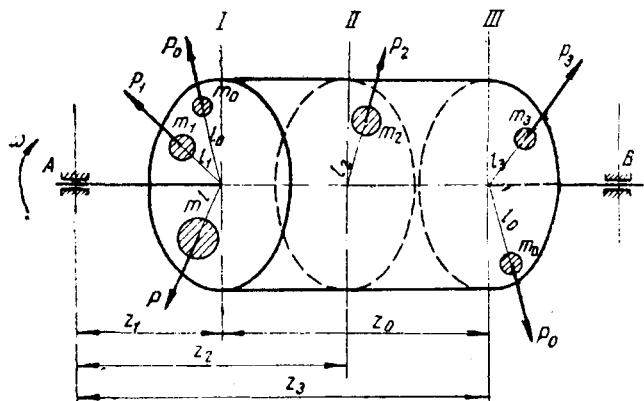


Рис. 184.

Подставляя в уравнение значения сил и сокращая на ω^2 , получим условие уравнивания масс

$$\bar{m}_1 l_1 + \bar{m}_2 l_2 + \bar{m}_3 l_3 + \bar{m} l = 0. \quad (165)$$

Неизвестный вектор $\bar{m}l$ определяем путем построения этого уравнения (рис. 183, б). Зная вектор $\bar{m}l$, задавшись m , находим l , или, задавшись l , отыскиваем m и располагаем на звене (см. рис. 183, а). Таким образом, несколько неуравновешенных масс, расположенных в одной плоскости, можно уравновесить одной массой, расположенной в этой же плоскости.

Уравнивание нескольких масс, расположенных в различных плоскостях. На звене (рис. 184) в различных плоскостях I, II, III располагаются неуравновешенные массы m_1 , m_2 , m_3 на расстояниях l_1 , l_2 , l_3 от оси вращения звена AB . Возникающие при вращении звена силы инерции $P_1 = -\omega^2 l_1 m_1$, $P_2 = -\omega^2 l_2 m_2$, $P_3 = -\omega^2 l_3 m_3$ будут восприниматься опорами A и B . Для того чтобы исключить действие этих сил на опоры, необходимо уравновесить не только

эти силы, но и моменты, создаваемые ими. Вначале будем уравнивать силы. Условие уравнивания

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P} = 0.$$

Здесь $P = -m\omega^2 l$ — сила, являющаяся результатом приложения дополнительной массы m на расстоянии l от оси вращения.

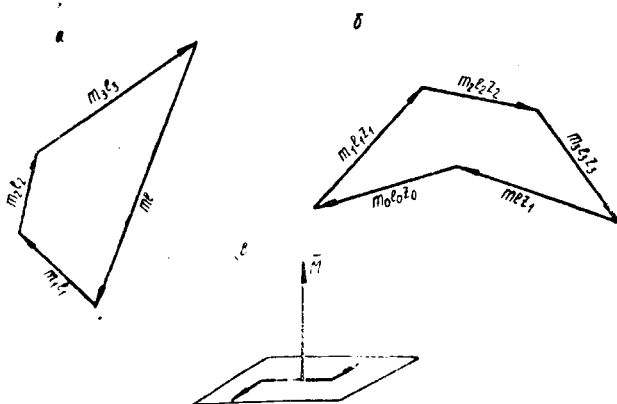


Рис. 185.

Плоскость приложения массы будет произвольной. Пусть это будет плоскость l . Подставив в уравнение значение сил и сокращая на ω^2 , получим

$$\bar{m}_1 l_1 + \bar{m}_2 l_2 + \bar{m}_3 l_3 + \bar{m} l = 0. \quad (166)$$

Неизвестный вектор $\bar{m} l$ находим путем построения этого уравнения (рис. 185, а). Будем уравнивать моменты, создаваемые всеми этими силами и воспринимаемые опорами A и B . Условие уравнивания моментов

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \bar{M} + \bar{M}_0 = 0,$$

где

$$M_1 = m_1 \omega^2 l_1 z_1; \quad M_2 = m_2 \omega^2 l_2 z_2;$$

$$M_3 = m_3 \omega^2 l_3 z_3; \quad M = m \omega^2 l z_1; \quad M_0 = m_0 \omega^2 l z_0.$$

Момент M_0 является результатом приложения двух масс m_0 , создающих пару сил. Нельзя помещать только одну массу m_0 , так как нарушается равновесие сил. Если в уравнение равновесия моментов подставим их значение и сократим на общий множитель ω^2 , то получим

$$\bar{m}_1 l_1 z_1 + \bar{m}_2 l_2 z_2 + \bar{m}_3 l_3 z_3 + \bar{m} l z_1 + \bar{m}_0 l_0 z_0 = 0. \quad (167)$$

Построим это уравнение. Условимся момент силы представлять в виде вектора, направление которого принимаем в соответствии с рис. 185, в. Построив уравнение (167), получаем искомый вектор $m_0 l_0 z_0$ (рис. 185, б). Для отыскания направления векторов уравнения (167) можно воспользоваться предыдущим построением (рис. 185, а), повернув все векторы на 90° по часовой стрелке. Задав шись величиной z_0 (пусть это будет расстояние между плоскостями I и III) и l_0 по известному вектору $m_0 l_0 z_0$, находим массы m_0 . Массы располагаем в плоскостях I и III, находящихся на расстоянии z_0 друг от друга в соответствии с направлением вектора $m_0 l_0 z_0$. При вращении возникает пара сил $P_0 z_0$.

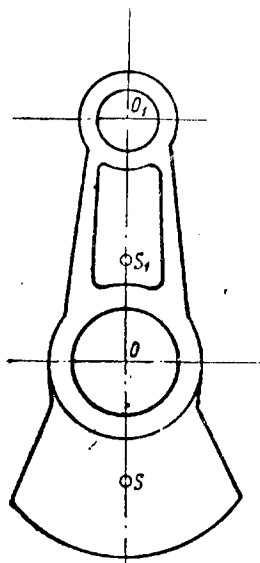


Рис. 186.

Таким образом, несколько масс, располагающихся в различных плоскостях, можно уравновесить тремя массами, две из которых одинаковы (массы m_0) и помещаются в различных плоскостях, а третья — масса, отличная от них, и находится в произвольной плоскости. Вместе с тем действие двух масс m_0 и m в плоскости I можно заменить

действием одной массы, расположенной в этой же плоскости. Следовательно, несколько масс, находящихся в различных плоскостях, можно уравновесить и двумя различными массами, располагающимися в различных плоскостях. После определения уравновешивающих масс можно создать конструкцию уравновешенного звена. На рис. 186 показан кривошип с конструктивно уравновешенной массой.

Балансировка звеньев

Балансировке подвергаются готовые звенья, у которых либо вследствие неоднородности их материала, либо вследствие отклонения действительных размеров от размеров на чертеже появляются неуравновешенные массы.

Различают два вида балансировки звеньев — статическую и динамическую.

Статической балансировке подвергаются плоские звенья, т. е. звенья малой толщины, у которых неуравновешенные массы практически располагаются в одной плоскости. Способов статической балансировки существует несколько. На рис. 187 показано звено 1, подлежащее статической балансировке. Оно помещается на ось 2, опирающуюся на призмы 3. Если звено предоставить самому себе, то имеющаяся неуравновешенная масса займет положение 4, близкое к вертикали. На вертикали масса m_1 не будет находиться, так

как этому препятствует момент трения качения оси 2 по призме 3. На звено 1 поместим груз 5. При постепенном его увеличении звено будет поворачиваться и при максимальном значении груза, рав-

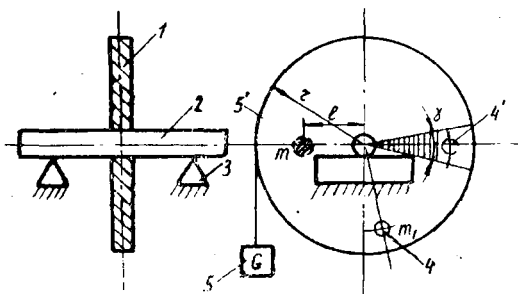


Рис. 187.

ном G , масса m_1 займет положение $4'$. В этом случае масса уравновешивающего груза определяется из условия $\frac{G}{g}r = l_1m_1$. Уравновешивающую массу можно расположить на звене 1 в наиболее удобном месте, исходя из конфигурации звена. Следовательно, задавшись величи-

ной l , находим $m = \frac{G}{g} \frac{r}{l}$.

Эта масса займет положение $5'$, когда масса m_1 займет положение $4'$. При балансировке звена сразу не представляется возможным установить точно местоположение массы m_1 , а следовательно, и массы m , так как груз G уравновесит массу m_1 не только в положении $4'$, но и в близких к ним положениях вследствие трения качения оси 2 по призме 3. Уравновешивающая масса обычно прикрепляется болтом или при помощи сварки. Иногда, если это позволяет конструкция звена, на нем высверливают отверстие с противоположной относительно оси стороны. Равновесие будет соблюдаться в пределах поворота звена 1 на некоторый угол γ .

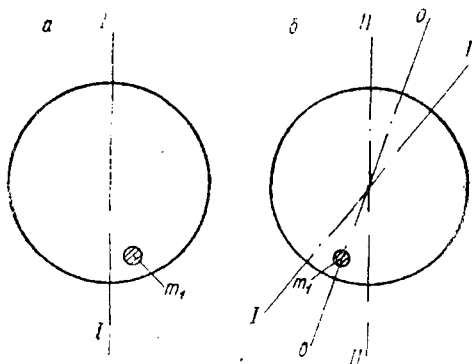


Рис. 188.

Для более точного определения положения неуравновешенной массы m_1 поступают следующим образом. Звено 1 при балансировке помещают на призмы и предоставляют самому себе. Масса займет положение справа от вертикали I—I (рис. 188, а), которая нано-

сится на звено. Затем все повторяется таким образом, чтобы масса расположилась слева от вертикали II—II (рис. 188, б). Если теперь провести прямую $O—O$, занимающую среднее положение между прямыми I—I и II—II, то на ней и будет располагаться масса m_1 .

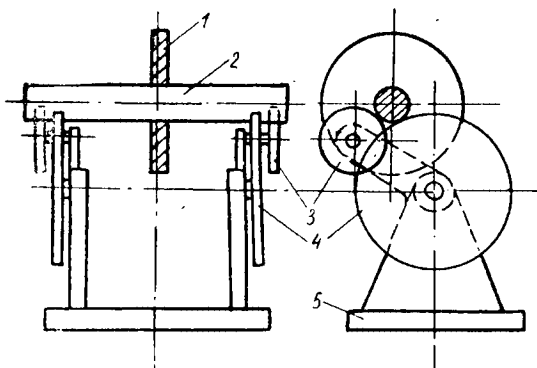


Рис. 189.

При большом весе балансируемых звеньев пользуются балансировочными станками, у которых балансируемое звено 1 (рис. 189) располагается на оси 2, опирающейся на диски 3 и 4. Эти диски помещаются на подшипниках качения стойки 5. В целях уменьшения влияния трения можно менять положение дисков 3 относительно дисков 4. Процесс балансировки осуществляется аналогично предыдущему.

Другой станок для статической балансировки представляет собой рычажные весы (рис. 190). Звено 1, подлежащее балансировке, устанавливается на рычаге 2 свободно, и неуравновешенная масса m_1 занимает нижнее по-

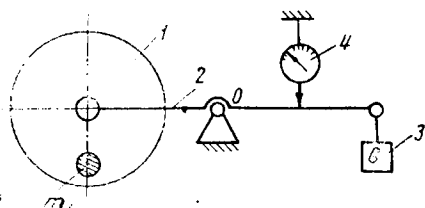


Рис. 190.

ложение. В этом положении звено уравниваем грузом G . Затем звено 1 медленно вращаем до тех пор, пока индикатор 3 не будет иметь максимальное (или минимальное — в зависимости от направления вращения) показание. Составив сумму моментов сил относительно оси O , находим значение неуравновешенного статического момента массы $m_1 l_1$. Местоположение линии, на которой располагается масса m_1 , находим вышеуказанным способом. Рассмотренные способы статической балансировки далеко не исчерпывают всех существующих.

В настоящее время широко применяются специализированные универсальные балансировочные машины для статической балансировки [в динамическом режиме, т. е. при непрерывном вращении балансируемого звена. Это позволяет значительно повысить точность и производительность при балансировке [8].

Динамическая балансировка осуществляется на специальных балансировочных станках. Современные станки оснащены устройствами, которые автоматически фиксируют неуравновешенность звена — величину и местоположение масс. Обычно балансировочные станки снабжаются сверлильно-фрезерной головкой, при помощи которой удаляется часть материала звена для его балансировки [8].

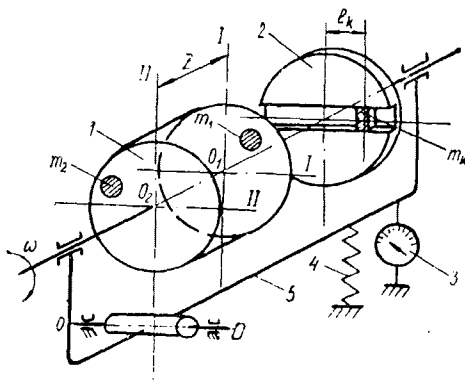


Рис. 191.

Принцип действия станков для динамической балансировки удобно рассмотреть на примере станка с качающейся рамой (рис. 191). Звено I , подлежащее динамической балансировке, помещается на раму 5 , которая, опираясь на пружину 4 , может качаться вокруг оси OO . На оси вращения звена имеется диск 2 с пазом, в котором располагается дополнительный груз массой m_k . Индикатор 3 служит для фиксирования амплитуды качания рамы 5 . Пружина 4 поддерживает раму. При теоретическом расчете уравнивания нескольких масс, располагающихся в различных плоскостях, было показано, что их можно уравновесить двумя различными массами, располагающимися в двух различных плоскостях. Следовательно, какую-либо неуравновешенность звена можно представить в виде двух неуравновешенных масс, располагающихся в двух различных плоскостях. Если теперь установить статические моменты этих масс, то задача уравнивания звена будет решена.

Итак, полагаем, что неуравновешенность звена I представляется в виде масс m_1 и m_2 , располагающихся соответственно в плоскостях IO_1I и IIO_2II . Плоскость IIO_2II проходит через ось OO . Если

звено 1 и диск 2 привести во вращение с угловой скоростью ω , то возникают силы инерции

$$P_1 = -m_1 \omega^2 l_1 \quad \text{и} \quad P_2 = -m_2 \omega^2 l_2.$$

Сила P_1 будет создавать момент $M_1 = m_1 \omega^2 l_1 z \cos \omega t$ относительно оси OO , приводящий раму 2 в колебательное движение. При выбеге скорость звена ω будет уменьшаться, и в момент прохождения через резонансную скорость амплитуда качания рамы 5 будет максимальной.

Процесс балансировки осуществляется следующим образом. После того как звено 1 установлено на раму станка, дополнительный груз помещается в центре диска 2. Звено приводится во вращение, и при выбеге индикатор 3 фиксирует

максимальное значение амплитуды $A_1 = kP_1$, где k — коэффициент пропорциональности, постоянный для данной системы станок — звено. Затем дополнительный груз перемещается вправо на расстояние l_k и снова при выбеге фиксируется амплитуда A_2 , потом — влево на расстояние l_k и опять при выбеге фиксируется амплитуда.

В каждом из этих трех случаев будут иметь место силы инерции (рис. 192, а—в). Параллелограммы сил совместятся (см. рис. 192, г). Из свойств параллелограмма имеем $2P_k^2 + 2P_1^2 = R_2^2 + R_3^2$. Заменяя силы амплитудами, которые им пропорциональны, получим $2A_k^2 + 2A_1^2 = A_2^2 + A_3^2$, откуда

$$A_k = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}},$$

но

$$A_k = kP_k = -km_k l_k \omega^2,$$

а

$$A_1 = -km_1 l_1 \omega^2.$$

Взяв отношение величин, находим $m_1 l_1 = \frac{A_1}{A_k} m_k l_k$. Таким образом, определяется статический момент неуравновешенной массы m_1 .

Найдем угол α , фиксирующий положение массы относительно прорези, по которой перемещается масса m_k . Из рис. 192, *з* имеем

$$A_3^2 = A_1^2 + A_k^2 - 2A_1A_k \cos \alpha,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{A_1^2 + A_k^2 - A_3^2}{2A_1A_k}.$$

Уравновешивающую массу m помещаем в плоскости IO_1I , находя ее из условия $ml = m_1l_1$. Так как угол α имеет два значения, будет не более двух попыток уравновешивания, после чего при вращении звена I колебания рамы B уже происходить не будут. После уравновешивания массы m_1 звено I переставляется на раме так, чтобы плоскость IO_1I проходила через ось опоры OO , а затем производится уравновешивание массы m_2 аналогично предыдущему.

§ 46. Уравновешивание плоских механизмов

Движение точек звеньев плоских механизмов при непрерывном вращении ведущего звена происходит по замкнутым траекториям сложной формы. В частном случае это может быть дуга окружности или отрезок прямой. Во всех случаях скорость точек будет меняться либо по величине и направлению, либо только по направлению. Движение же точек звеньев с переменной скоростью приводит к возникновению сил инерции и моментов пары сил инерции, которые воспринимаются опорами и фундаментами механизма. У быстроходных механизмов эти силы инерции и моменты пар сил инерции даже при малых величинах масс звеньев могут достигать больших значений и периодически воздействовать на опоры и фундамент, нагружая и приводя их в колебательное движение. Все это отрицательно сказывается на работоспособности и долговечности деталей и узлов машины. Поэтому целесообразно либо устранить эти динамические явления, либо значительно уменьшить их влияние. Эта задача решается путем уравновешивания машин. При работе уравновешенной машины давление на ее фундамент будет постоянным.

Рассмотрим уравновешивание сил инерции звеньев. Установим, при каких условиях это возможно. Рассматривая механизм как единую систему, можно отыскать его центр тяжести [1], зная центры тяжести звеньев. При циклическом замкнутом движении звеньев механизма центр тяжести его может перемещаться по замкнутой траектории или быть неподвижным. При перемещении центра тяжести по замкнутой траектории всегда будет иметь место переменное ускорение (если не по величине, то по направлению), а следовательно, и переменная сила инерции, воспринимаемая опорами и фундаментом машины. При неподвижном же центре тяжести сила

инерции будет равна нулю. Таким образом, задача уравнивания машины сводится к получению такой системы, в которой центр тяжести был неподвижен. Это можно осуществить соответствующим подбором масс звеньев. Рассмотрим на примере некоторых механизмов, как это осуществляется.

На рис. 193 показан четырехзвенный механизм, массы звеньев которого m_1 , m_2 и m_3 . Координаты a_1 , a_2 и a_3 определяют положение

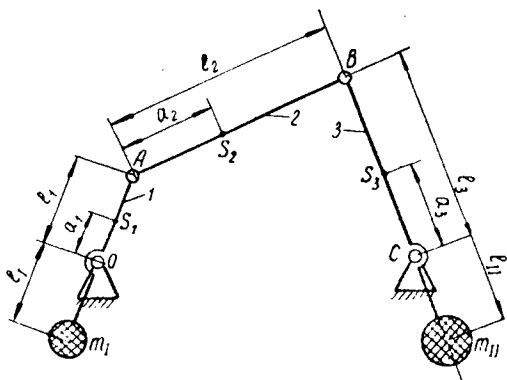


Рис. 193.

центров тяжести звеньев S_1 , S_2 и S_3 . Массу звена 1 статически распределим в точки O и A из условия $m_{1O} + m_{1A} = m_1$ и $m_{1O}a_1 - m_{1A}(l_1 - a_1) = 0$. Из этих уравнений получим

$$m_{1O} = m_1 \frac{l_1 - a_1}{l_1} \quad \text{и} \quad m_{1A} = m_1 \frac{a_1}{l_1}.$$

Массу звена 3 статически распределим в точки B и C , в результате получим

$$m_{3B} = m_3 \frac{a_3}{l_3} \quad \text{и} \quad m_{3C} = m_3 \frac{l_3 - a_3}{l_3},$$

а массу звена 2 в точки A и B , тогда

$$m_{2A} = m_2 \frac{l_2 - a_2}{l_2} \quad \text{и} \quad m_{2B} = m_2 \frac{a_2}{l_2}.$$

В результате получим массы, сосредоточенные в точках O , A , B и C . Величины этих масс $m_O = m_{01}$, $m_A = m_{1A} + m_{2A}$, $m_B = m_{2B} + m_{3B}$ и $m_C = m_{3C}$. Массы в точках O и C неподвижны и не создают сил инерций, массы же в точках A и B уравниваем уже известным способом. Величины уравнивающих масс будут равны

$$m_I = \frac{m_A l_1}{l_1} \quad \text{и} \quad m_{II} = \frac{m_B l_3}{l_{II}}.$$

Таким образом, четырехзвенный механизм уравнивается двумя массами m_I и m_{II} . Можно четырехзвенный механизм уравни-

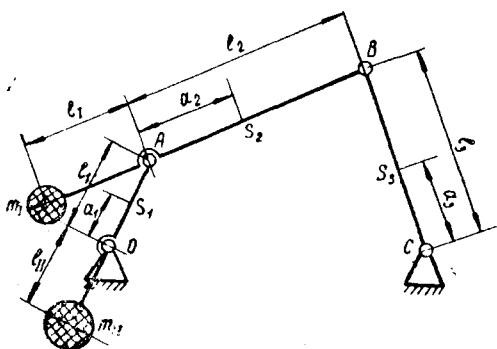


Рис. 194.

весить несколько иначе (рис. 194). Массы звеньев механизма распределяем так же, как и в предыдущем случае, по точкам O, A, B и C .

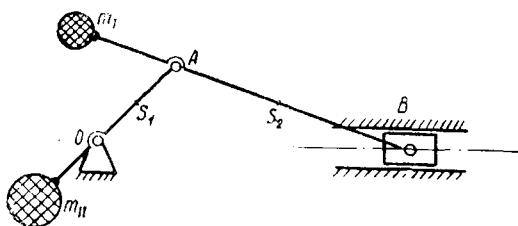


Рис. 195.

Затем массы m_B и дополнительную m_I сосредоточиваем в точке A $m_I = m_B \frac{l_2}{l_1}$. В этом случае $m_A = m_1 + m_{1A} + m_B$, где $m_B = m_{2B} + m_{3B}$,

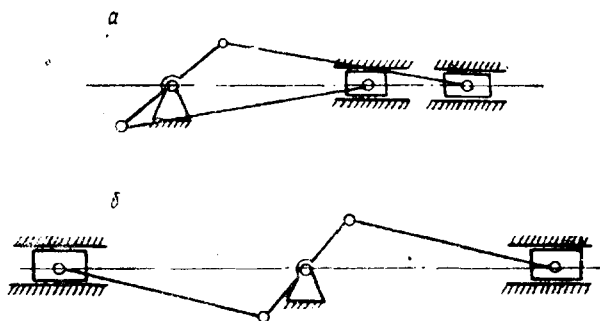


Рис. 196.

Массу m_A уравниваем массой $m_{II} = m_A \frac{l_1}{l_2}$. Аналогично произ-

водится расчет уравнивания кривошипно-ползунного механизма (рис. 195).

Уравнивание механизмов может быть осуществлено путем определенного соединения двух одинаковых механизмов. На рис. 196, а показано частичное уравнивание кривошипно-ползунных механизмов, а на рис. 196, б — полное уравнивание.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболовский. Теория механизмов и машин. М., Гостехиздат, 1951.
2. С. Н. Кожевников. Теория механизмов и машин. М., Машгиз, 1969.
3. Г. Г. Баранов. Курс теории механизмов и машин. М., «Машиностроение», 1967.
4. С. И. Артоболовский. Теория механизмов и машин. М., «Высшая школа», 1965.
5. В. А. Юдин, Л. В. Петрокас. Теория механизмов и машин. М., «Высшая школа», 1967.
6. З. Ш. Блох. Регулирование машин. М., Гостехиздат, 1950.
7. Л. Б. Левенсон. Теория механизмов и машин. М., Машгиз, 1954.
8. В. А. Щепетильников. Уравнивания машин и приборов. М., «Машиностроение», 1965.
9. Н. И. Колчин. Механика машин. Ч. I—V. М., Машгиз, 1948—1957.
10. В. А. Зиновьев. Курс теории механизмов и машин. М., Машгиз, 1954.
11. А. С. Кореняко, Л. И. Кременштейн. Киев, Гостехиздат, 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава I. Строение механизмов	4
§ 1. Кинематические пары	—
§ 2. Кинематические цепи. Механизмы	7
§ 3. Плоские механизмы	9
§ 4. Лишние степени подвижности и пассивные условия связей	17
Глава II. Кинематический анализ рычажных механизмов	17
§ 5. Построение планов скоростей и ускорений	—
§ 6. Планы скоростей и ускорений для групп 2-го класса	25
§ 7. Планы скоростей и ускорений для групп 3-го класса	33
§ 8. Построение кинематических диаграмм	39
§ 9. Аналитическая кинематика механизмов	43
Глава III. Синтез четырехзвенных и фрикционных механизмов	50
§ 10. Условие существования кривошипа в четырехзвенном механизме	—
§ 11. Синтез четырехзвенного механизма по заданным условиям	51
§ 12. Фрикционные механизмы	55
Глава IV. Зубчатые механизмы	59
§ 13. Основные параметры зубчатого зацепления	60
§ 14. Зубчатые механизмы, состоящие из нескольких пар зубчатых колес	62
§ 15. Дифференциальные и планетарные зубчатые механизмы	65
§ 16. Основной закон зацепления (теорема Виллиса)	68
§ 17. Теория эвольвентного зацепления	69
§ 18. Способы изготовления зубчатых колес	74
§ 19. Параметры зубчатого зацепления и зубчатых колес, изготовленных со сдвигом нарезающего инструмента	76
§ 20. Относительное скольжение эвольвентных профилей зубьев	79
§ 21. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного без сдвига нарезающего инструмента	81
§ 22. Минимальное число зубьев зубчатого колеса, изготовленного со сдвигом нарезающего инструмента-рейки	83
§ 23. Дуга зацепления. Коэффициент перекрытия	84
§ 24. Коническое зубчатое зацепление	86
§ 25. Косозубые и шевронные зубчатые колеса	89
§ 26. Точечное зубчатое зацепление М. Л. Новикова	90
Глава V. Кулачковые механизмы	93
§ 27. Кинематический синтез кулачковых механизмов	95
§ 28. Динамический синтез кулачковых механизмов	100
Глава VI. Силовой расчет механизмов	104
§ 29. Силы инерции в плоских механизмах	—
§ 30. Учет сил инерции методом замещающих масс	105

§ 31. Условия статической определенности плоской кинематической цепи	106
§ 32. Силовой расчет групп	108
§ 33. Силовой расчет дифференциальных и планетарных механизмов	114
§ 34. Последовательность силового расчета механизмов	117
§ 35. Применение принципа возможных перемещений для определения уравновешивающей силы. Теорема Н. Е. Жуковского о жестком рычаге	118
§ 36. Трение в кинематических парах	119
Глава VII. Динамика машин	138
§ 37. Тахограмма и силы, действующие в машине	—
§ 38. Механический коэффициент полезного действия машины	140
§ 39. К. п. д. винтовой кинематической пары	141
§ 40. К. п. д. планетарных и дифференциальных механизмов	—
§ 41. Приведенная масса и приведенная сила	145
§ 42. Истинная скорость движения машины, время и ускорение	148
§ 43. Соотношения между кинетической энергией, приведенной массой и скоростью движения машины	152
§ 44. Регулирование скорости машины	151
§ 45. Уравновешивание вращающихся масс	168
§ 46. Уравновешивание плоских механизмов	177

Заказ на эту книгу, а также другие научные труды Уральского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С. М. Кирова направляйте по адресу: г. Свердловск, К-2, УПИ им. С. М. Кирова, главный учебный корпус, редакционно-издательский отдел.

Вениамин Израилевич Соколовский

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Конспект лекций

Научный редактор доц. канд. техн. наук Т. Б. Сатовская

Редактор издательства *Л. П. Федотова*

Технический редактор *В. П. Шабанова*

Корректор *Л. М. Пальмина*

Редакционно-издательский отдел УПИ им. С. М. Кирова, Свердловск, К-2, главный
учебный корпус

НС 18084 Сдано в набор 11/XI 1970 г. Подписано к печати 13/IV 1971 г.
Печ. л. 11,5 Усл. л. 11,5 Бумага 60×90¹/₁₆ Цена 90 коп. Тираж. 3000 Заказ 644.

Типография издательства «Уральский рабочий», г. Свердловск, проспект Ленина, 49

Цена 90 коп.

500